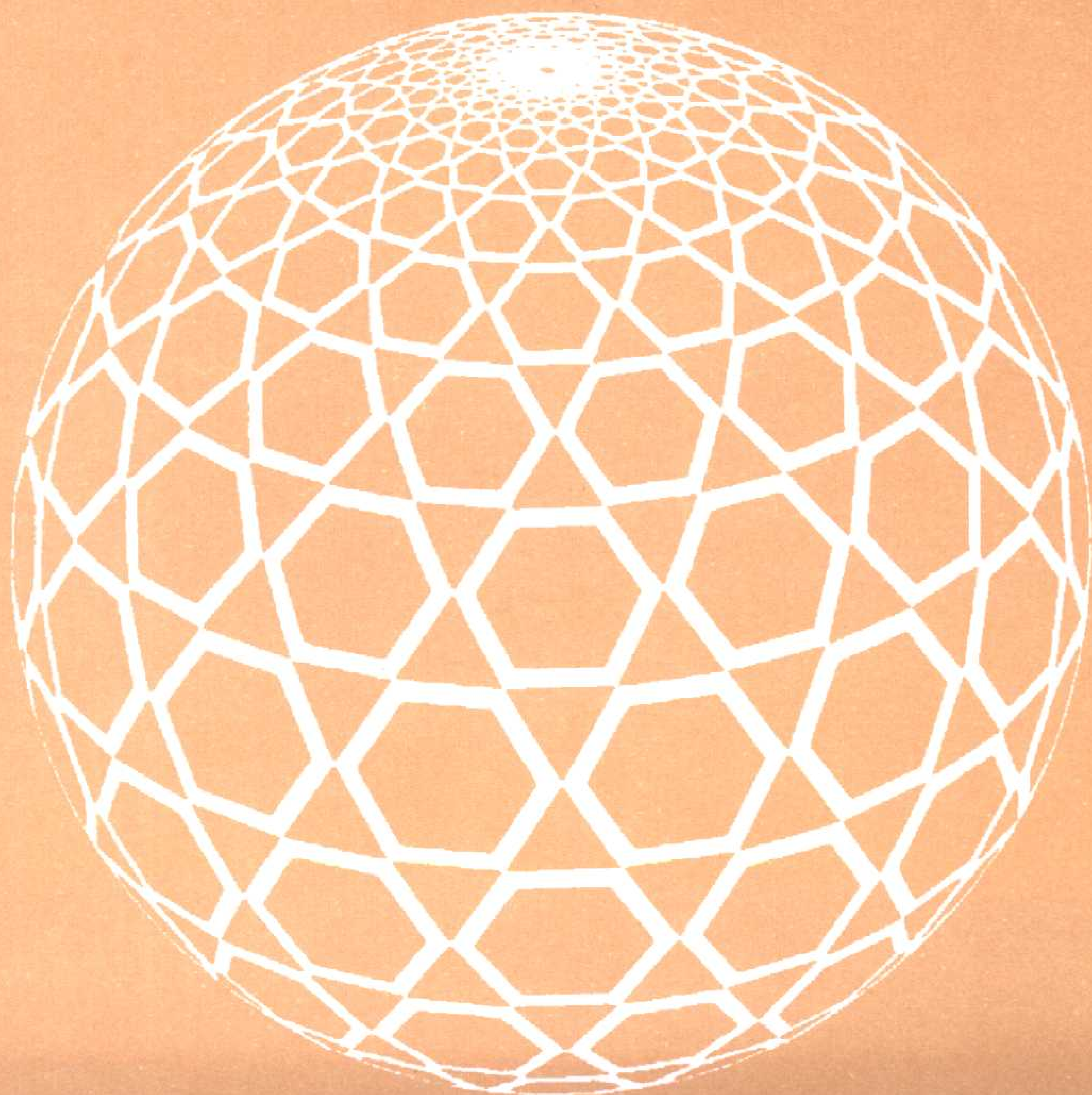
黎曼博士的零点

[英] 卡尔·萨巴 著　汪晓勤等 译 ● 上海教育出版社





本书得到国家自然科学基金

委员会数学天元基金的资助

Karl Sabbagh

Dr. Riemann's Zeros

Atlantic Books

根据太西洋图书公司 2002 年版译出

本书中文版权由大苹果版权代理公司帮助取得

图书在版编目（CIP）数据

黎曼博士的零点/（英）萨巴著；汪晓勤等译. —上海：上海教育出版社，2006.5
（通俗数学名著译丛/史树中，李文林主编）
ISBN 7-5444-0496-X

Ⅰ.黎… Ⅱ.①萨… ②汪… Ⅲ.黎曼猜测-普及读物 Ⅳ.0156-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第024067号

通俗数学名著译丛

黎曼博士的零点

［英］卡尔·萨巴 著

汪晓勤 张 琰 徐晓君 译

上海世纪出版股份有限公司
上 海 教 育 出 版 社 出版发行

易文网：www.ewen.cc

（上海永福路123号 邮编：200031）

各地新华书店经销 苏州望电印刷有限公司印刷

开本 850×1156 1/32 印张 10 插页 4

2006年5月第1版 2006年5月第1次印刷

印数 1-5，000本

ISBN 7-5444-0496-X/O·0010 定价：18.00元

（如发生质量问题，读者可向工厂调换）

开創新世紀的
数學文化

陳省身
二千年十一月

译 丛 序 言

数学，这门古老而又常新的科学，已阔步迈进了21世纪.

回顾过去的一个世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志.因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面，20世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步.这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急.

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视.早在1960年代，华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今.改革开放以来，我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说，我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一

个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的宏伟工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多彩.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气.在这样的情况下,上海教育出版社按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.值得高兴的是,这项工作从一开始就得到了数学界许多人士的赞同与支持,特别是数学大师陈省身先生两次为丛书题词,使我

们深受鼓舞.到目前为止,这套丛书已出版了近20种,印数大多逾万,有的已经是第四次印刷,这对编译者来说确是令人欣慰的信息.我们热切希望广大读者继续关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》的出版获得更大的成功.

让我们举手迎接数学科学的新的黄金时代,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

2001年8月

致　谢

本书的写作动机来自作者与贝拉·鲍罗巴斯(Bela Bollobas)的许多次令人十分愉快的交谈.交谈内容是:可以写一本什么样的书,方能让非数学家看到数学的乐趣和重要性呢?结果,我锁定数学难题,最后确定了一个特殊的难题——黎曼假设.

本书的核心内容源于与两打左右数学家的交谈.他们目前都在研究黎曼假设,且都抽出时间接受了我的采访(有时不止一次),我们不仅谈论黎曼假设本身,而且还谈论他们自己对于数学的热情,数学对他们生活所产生的影响,他们如何看待纯数学的哲学意义,以及当时我能想到的任何其他话题.

由于路易斯·德·布兰奇(Louis de Branges)心无旁骛地从事该难题的研究,并且坚信它能够解决,因此我和他一起讨论数学要比其他我所采访的数学家更深入,感谢他多次大度地抽出时间来热情接待我.

我所采访过的多数其他数学家在本书中都有引述,但即使是下列名单中并没有被引用的数学家也为我理解该学科提供了巨大的帮助.

他们是:托姆·阿波斯托尔(Tom Apostol)、米歇尔·贝利(Michael Berry)、恩里克·邦比艾里(Enrico Bombieri)、丹尼尔·布普(Daniel Bump)、阿兰·康尼斯(Alain Connes)、布里安·康雷(Brian Conrey)、路易斯·德·布兰奇、斯蒂夫·戈内克(Steve Gonek)、安德鲁·格兰韦尔(Andrew Granville)、罗

格·希斯-布朗(Roger Heath-Brown)、马丁·赫胥黎(Martin Huxley)、亚历山大·伊维克(Alexander Ivic)、亨利克·艾瓦尼克(Henryk Iwaniec)、马提·朱蒂拉(Matti Jutila)、乔纳森·济廷(Jonathan Keating)、李先金(Xian Jin Li)、修·蒙哥马利(Hugh Montgomery)、本桥(Yoichi Motohashi)、尼科莱·尼科尔斯基(Nikolai Nikolski)、安德鲁·奥德莱斯科(Andrew Odlyzko)、萨缪尔·帕特森(Sameul Patterson)、查尔斯·梁维克(Charles Ryavec)、彼得·萨纳克(Peter Sarnak)和阿特尔·塞尔伯格(Atle Selberg).

除了和我谈论他的研究工作,米歇尔·贝利还拨冗阅读了书稿,并纠正了我的一些大数学错误.彼得·威尔逊(Peter Wilson)阅读了书稿,为我提供了一个数学外行对本故事的反应.感谢他们.

我还要感谢亚德里安·穆尔(Adrian Moore),虽然他是位哲学家而不是数学家,但他帮助我理解了该主题中的一些哲学问题.

斯蒂芬·拜恩(Stephen Bann)告诉我穆西尔《年轻的特尔莱斯》中有关虚数的段落,亚提萧(Artie Shaw)则允许我引用他的著作《灰姑娘的遭遇》.

我要感谢美国数学研究所和它的所长布里安·康雷,他们允许我去听帕洛阿图的L-函数研讨会.我还有机会参加在巴登·符腾堡上沃尔法赫独一无二的数学研究所举办的黎曼ζ函数理论研讨会,对此我也感激在心.

伦敦图书馆是一个资料宝库.尽管其数学藏书完全是随意性的(它主要是文科图书馆),但它却收藏了不同寻常的、有时甚至是奇特的数学材料.

苏格兰圣安德鲁大学数学与统计学院的麦克图特(Mac Tutor)数学史档案亦很有价值,其网址是http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html.

纽约法拉·斯特劳斯·吉鲁克斯(Farrar Straus Giroux)出版社的约翰·格鲁斯曼(John Glusman)先生,虽然他以前对于数学并没有什么兴趣,但热情地同意出版本书,英国大西洋书局(Atlantic Books)的托比·穆迪(Toby Mundy)先生也同样热情地答应出版本书.他们都提供了每一位作者都需要、但并非总能获得的慷慨支持.克拉拉·法尔默(Clara Farmer)和丽贝卡·威尔逊(Rebecca Wilson)(大西洋书局)和约翰·伍德如夫(John Woodruff)在行文、插图和数学表达方面提出了他们的宝贵意见,为本书的通俗化作出了贡献,我感谢他们.

最后,我还要问候我的两位数学老师,比尔·布莱特(Bill Blight)和乔伊·丘尔奇(Joe Church).在一两年时间里,在他们的帮助下,我觉得自己理解了数学的一切,并看到了数学在更高层次上驱使着全世界职业数学家的魅力.

数　学　家

托姆·阿波斯托尔(Tom Apostol),加州理工学院

米歇尔·贝利(Michael Berry),布里斯托尔大学

恩里克·邦比艾里(Enrico Bombieri),高等研究院,普林斯顿

丹尼尔·布普(Daniel Bump),斯坦福大学,加利福尼亚

阿兰·康尼斯(Alain Connes),高等科学研究院,巴黎

布里安·康雷(Brian Conrey),美国数学研究所,帕洛阿图,加利福尼亚

路易斯·德·布兰奇(Louis de Branges),普度大学,拉法叶,印第安纳

斯蒂夫·戈内克(Steve Gonek),罗切斯特大学,纽约

安德鲁·格兰韦尔(Andrew Granville),乔治亚大学,雅典,乔治亚

罗格·希斯-布朗(Roger Heath-Brown),牛津大学

马丁·赫胥黎(Martin Huxley),加的夫大学

亚历山大·伊维克(Alexander Ivic),贝尔格莱德大学,塞尔维亚

亨利克·艾瓦尼克(Henryk Iwaniec),罗格斯大学

马提·朱蒂拉(Matti Jutila),图尔库大学

乔纳森·济廷(Jonathan Keating),布里斯托尔大学

李先金(Xian Jin Li),杨百翰大学,犹他

修·蒙哥马利(Hugh Montgomery),密歇根大学

本桥(Yoichi Motohashi),日本大学,东京

尼科莱·尼科尔斯基(Nikolai Nikolski),波尔多大学

安德鲁·奥德莱斯科(Andrew Odlyzko),密歇根大学

萨缪尔·帕特森(Sameul Patterson),数学研究所,哥丁根大学

查尔斯·梁维克(Charles Ryavec),加州州立大学,圣巴巴拉

彼得·萨纳克(Peter Sarnak),高等研究院,普林斯顿

阿特尔·塞尔伯格(Atle Selberg),高等研究院,普林斯顿

关于配套知识

本书末尾我加了一些“配套知识”，供那些需要了解或回忆某些基本数学术语、符号和方法的读者参考. 当我首次提到对数概念时，如果你已经知道什么是对数，那么你只要继续读下去就可以了. 但如果你想作更多的了解，那么你可以阅读一下配套知识. 类似地，我还写了诸如“方程”、“图像”、“无穷级数”等，其目的是让读者能够理解故事，而不是写数学课本.

前　言

许多人会说，通过撰写本书来完成的任务注定是要失败的. 对他们而言，这就像是我用阿拉伯文来写一本书，相信不说阿拉伯语的人们会在书中找到一些对他们有启发的东西. 我宁愿作另一个类比. 对我来说，这就像是描述一个遥远的部落一样，读者对其风俗和语言并不熟悉，而我则十分了解他们，足以对他们的精神和物质生活作出描述.

对于有些人来说，阅读人类学家的著作，诸如马林诺夫斯基①(Bronoslaw Malinowski)关于超布连人的魔幻花园，或者普里查德②(Edward Evans Pritchard)关于努尔人的神谕的著作，与他们的实际经验或兴趣是如此的遥远，以致这样的书和用阿拉伯文来写并无差异. 但至少对于其他人来说，人类学家对于他们的主人公思想的洞察是可以理解的，不论读者懂不懂那些部落的语言.

数学家也形成了一个部落，这个部落也有自己的语言和风

---

① 马林诺夫斯基(B. Malinowski，1884—1942)，波兰裔英国社会人类学家，功能学派创始人之一，提倡社会人类学应具有应用价值，主要著作有《野蛮社会中的犯罪与习俗》、《文化的科学理论》等. ——译者注

② 普里查德(E. E. Pritchard，1902—1973)，英国社会人类学家，主要著作有《亚赞地人的妖术神谕与巫术》(1937)、《努尔人》(1940)、《努尔人的亲属制度与婚姻》(1951)、《努尔人的宗教》(1956)、《社会人类学论集》(1962)、《原始宗教理论》(1965)等. ——译者注

俗习惯.他们有自己的文明,一种形成我们其余的人生活框架的"文明".他们去办公室或系里工作,洗洗东西,爬爬山,看看电视——但并不经常.但他们的精神生活与我们其他人完全不同.他们把真理看得清清楚楚,有时令我们惊叹不已.正如我们将会发现的那样,对于数学材料是在"那儿"——有待于发现的事实或关系,还是在"这儿"——人类思维的创造,类似于发明、绘画或诗歌,存在着争论.如果你相信——和我一样——数学真理在"那儿",那么一位数学家证明一个假设就是发现某件永远正确的事,以及很可能是他或她第一个欣赏到的一个真理.生活在一个在未知区域快速旋转的行星表面,数学探索者们相信他们可以作出的发现是没有止境的.倘若数学史可资借鉴,那么,他们【1】似乎永远不能去域外探索,通过新的发现求知.但正如现代社会人类学所告诉我们的那样,我们与所谓的域外人类有着很多共同的地方,我希望本书能告诉大家:数学家并不像我们所认为的那样与我们其余的人截然不同.

最近,我在美国的一个小大学城偶然看到两架数学书.这些书并非基础数学教材,而是高度专业化的著作,如《有限马尔柯夫链》、《群与向量空间》等.对我来说,数学书——即使是那些远远高出我的理解水平的书——具有无法抵制的吸引力,这部分是因为它们的题目,部分则是因为我能记得我自己在大学学过的数学知识,这些知识使我能够理解书中出现的小部分内容,就像整个乌云密布的天空中的几小块蔚蓝色.我买过一本书,主要是因为它的书名,书名在语法上是错误的,而它的数学内容——我确信——却是正确的.它叫《线性代数做对了》.

接着,我又看到一本名为《集合的快乐》的书,它证明数学家也是人,类似于阿里克·康福特(Alec Comfort)的《性的快乐》.现在,如果我看到海洋考古学家写的书《沉船的快乐》或探险家写的《跋涉的快乐》,我是绝不会再看第二眼的.考古学家和探险家都是人类的一分子,就像你和我一样.我们可以想像自己在做

着他们的工作，和他们一起开玩笑，听他们说水下或陡峭山坡上的时光，谈论性.

但数学家呢？我即将谈及.我意识到这就是本书所要写的内容——数学家的人文.这并不是博爱、慈善和家务意义下的人文，而是人性意义下的人文.数学的头脑可以不同于非数学头脑，但差异并不太大——与一名足球运动员的头脑和我的头脑，或我的头脑与任何一位女性的头脑之间的差异并无二致.一位陷入一个难题的数学家并不生活在另一星球上，就像其他人做针线、木刻或贝夏梅尔调味白汁一样.但他或她的数学事业之外的生活，他的热情、失望和弱点与你的或我的大同小异.

许多人十分害怕数学，面对数学式子或结论时惊慌失措，他们将熟悉这些思想的人奉若神明.这种反应部分是由于他们不相信数学有何趣味性.但数学家有一个秘密.不仅数学是有趣的，而且对数学的洞察乃是关于宇宙所作发现中最为有趣的发现. 【2】

这并非恭维话，本书也并非供本科生阅读的宣扬“数学真的有趣”的书.我没有能力撰写出这样一本书，因为对于该学科我了解得并不多.相反，它刻画的是数学上的一段特殊时期，在这段时间里，数学上最重要的未解难题之一可能到了解决的边缘.它是一个已有近150年历史的难题，每一个名副其实的数学家都渴望它以某种方法被解决.事实上，它可能是不可解的，即使知道那是数学上一个十分重要的步骤.需要做的是证明一个称为黎曼假设的特殊数学命题的正确性.该假设以黎曼的名字命名，黎曼在一篇发表于1859年的论文中首次提出了这个命题.该命题如果正确的话，将揭示出素数——不能被其他任何数(当然除1以外)整除的数，诸如13和41——的秘密.

证明黎曼假设可不像分裂一个原子或破译一个遗传密码.它的解法并没有可预见的能够改变世界的实际结果.但是，世界的一些伟人创造者的小说、绘画和哲学著作也没有这样的实际结果.正如我们将看到的，研究黎曼假设的数学可能具有实际应

用，但这并非数学家做研究的原因.他们中的许多人从数学中获得的乐趣比几乎任何其他活动都要多.他们经常是在年轻时先发现了这一乐趣.

大多数数学家并不仅仅把数学作为“一份工作”，像某人成为银行家或出版商或律师一样.因为在这些职业中，很少有从小就开始打基础的.并没有很多的孩子说“我长大要做银行家(或出版商或律师)”.但对我所遇到的数学家来说，几乎所有的人都在十几岁或更早时就开始了对该学科的严肃思考.

“在我还是小孩子的时候，我就开始对数学很感兴趣，”布里安·康雷说.“记得在我四五岁时，父亲就教给我负数知识，我对此很着迷.然后，或许在读八、九年级时，我实际上已经开始对数论感兴趣，我从学校图书馆借了一本《数论及其历史》.我读完了全书，看到了孪生素数①问题：‘有无穷多个孪生素数吗?’我不相信我们竟然不知道问题的答案——我说，‘不可能有这么难’，于是我开始对它进行研究.事实上，我觉得自己作为一名中学生，已经解决了这个问题.我把解法拿给新墨西哥大学的一些教授看，他们很感兴趣，并指出了错误的地方.”

【3】

查尔斯·梁维克也有类似的童年经历.“记得在十年级时，我们有这样一位数学老师，他按照规则把每个人都分了等级，有人为A级生，有人为B级生，等等，我在学校里大约是C级或D级生，因此被安排在靠窗的位置.但他所有那些漂亮的书都是靠窗放的，因此我能够得着.我在其中发现了克莱因(Klein)关于正二十面体以及解五次方程的书.我记得花了一整天去解一个三次方程，却怎么都解不出来.因此，我去了图书馆，找到了一本有关三次方程求解的书，我想，那可能是我真正喜爱数学的第一件大事.”

来自贝尔格莱德的塞尔维亚数学家亚历山大·伊维克认为，他在十几岁时解决了一个重要的数学问题.他的确解决了这

① 大小相差2的两个素数，如11和13，或29和31.

个问题，不过在他之前已经有人解决了."我在十五六岁时发现了拉格朗日多项式插值公式，"他说，"接下来的一个星期里，我一直在想，'这肯定是所有时代最重要的发现.'当我在一本书上看到至少在 250 年以前人们就已经知道这个公式时，我作出了一项明智的决定：在做好准备之前，我不再做任何研究. 但那个时候我就已经知道，自己要做一名职业数学家."

对于那些从未开发出数学天赋的人来说，上面这些叙述并不会引起什么共鸣. 这并不只是展示了对于数的熟练程度，它表明：这些人初次接触数学时就很喜欢数学. 路易斯·德·布兰奇是目前正在研究黎曼假设的数学家，在他小时候，他家的一位朋友、杜邦(Du Pont)公司前任总裁杜邦(Irénée Du Pont)先生给他出了一道题目，于是他就开始迷上了数学. 【4】

德·布兰奇告诉我，一个星期天的早上，他的祖父和杜邦打高尔夫球，他给他们捡球."杜邦先生打完高尔夫球后总是会在更衣室里喝上一杯糖蜜酒和橙汁. 一天早上，他突然对我的数学教育感兴趣，给我出了一道题：求正整数 a，b 和 c，使得

$$a^3+b^3=22c^3.$$

我花了整整半个学期才做出来."①

在这些年轻的数学家中，有许多都勇于接受年长者和更智慧者提出的挑战，甚至到了对课本提出质疑的程度. 朱丽亚·罗宾逊(Julia Robinson)的起点是 2 的平方根. 有些正整数的平方根本身也是正整数：例如，$\sqrt{25}$等于 5. 但有些则是小数：如 $\sqrt{2}$ 等于 1.414213562…，后面的点(本书中始终会出现)表示小数可以永远写下去. 本例中，它的意思是，你所取的位数越多，那么平方以后得结果就越接近 2. 但只有把无限多个位数乘起来，你才能精确地得到 2. 罗宾逊写道：

① 本书中右上角所缀的数字，指书后"注释"中注明的出处. ——译者注

> 在我七、八年级时，我们的课本上说无论怎样写 $\sqrt{2}$ 的小数展开式，它绝不会变成循环小数.①我不明白，一个人怎么会知道这一点的——他们所能知道的一切就是算出来的部分展开式并不循环. 回家后，我决定将它展开得更长一些，希望能够找到一个循环. 喔，不久算术就打败了我，尽管我和多数数学家一样十分固执.[2]

关于少年时代对数学的兴趣，最为有趣的故事之一是阿兰·康尼斯告诉我的，康尼斯是十分出色的法国数学家，他设计了自己【5】的数学方法来解决课堂上遇到的问题."事情发生在数理地理学的一个很小的地方. 这表明我对于不熟悉的事情有一种奇怪的、极端的看法. 大约从那时候起，我研究了其他许多地方，但那种一开始我就创造出的、给我以不同于常规观点的特别观点的主线却始终未曾断掉. 因此，我有了自己的方法，这种方法十分奇怪，因为，当老师所问的问题落入我的方法时，我自然马上就有了答案，但没有落入我的方法时——很多问题当然不会落入我的方法之中——我就像个傻瓜，不过我并不在乎."

很容易把这些早期数学兴趣的例子当作是极少数神童之例，但其中有很多例子并不能用这种方式来解释. 我与之交谈过的几乎每一位数学家都有类似的故事——未受过特殊训练、也无父母和学校的压力、与同伴和校友亦无明显差异的孩子，却能很好地理解一个数学命题，看出它的深度来. 此外，孩子通过从该命题推出结论而获得乐趣和兴奋感.

对于本书所介绍的那些数学家来说，他们早期的好奇心最终都发展成了证明最难问题的热情，而这种热情主要是因自身的满足感而产生的. 这里我说"主要"是因为，虽然人们纯粹为了

---

① 即开始重复出现，如 1.414 213 562 562 562 562 562 562…. ——原注

心智上的兴奋感而寻求黎曼假设的证明已经长达一百多年，但现在克雷(Clay)数学研究所已经为第一个证明者设立了百万大奖.

该研究所以令人疑虑顿消的小学算术加专业化数学术语，公开向那些可能会一显身手去证明黎曼假设的数学家们描述了这个难题：

> 一些数具有这样一种特殊性质：它们不能表示成两个更小的数的乘积，如 2,3,5,7 等. 这样的数叫素数. 它们在纯数学及其应用中扮演着重要角色. 这些素数在所有自然数中的分布并不遵循任何有规律的模式. 然而，德国数学家黎曼(G. F. B. Riemann，1826—1866)观察到素数的频率与一个复杂精美的函数"$\zeta(s)$"(称为黎曼 ζ 函数)的性态密切相关. 黎曼假设称：方程 $\zeta(s)=0$ 的所有有趣的解都位于同一条直线上. 这个假设对于前 1 500 000 000 个解都是成立的. 关于它对于每一个有趣的解都成立的证明能揭示出素数分布的许多秘密.[3]

【6】

"函数"与"方程"是大多数人都不熟悉的概念，但对数学家来说乃是家常便饭. 数学家们试图利用具体的情境、通过比喻和类比来传达这些抽象概念的含义，这可以帮助非数学家深入理解黎曼大思想背后的概念.

它为什么这么重要呢？我们只需说，黎曼假设的证明将会告诉数学家们关于一类重要的数——素数的大量信息，而素数主宰着纯数学的领域. 此外，多年来，证明黎曼假设的尝试使得数学家进入了各种各样的数学领域，有时引导他们创造出攻克该难题的新数学工具. 故事跨越数百年，它提供了数学上经常发生的故事的范例：表面上看，所提的问题简单明了，但这种简单性很快荡然无存，因为问题背后实际上包含了可怕的、令人意想

不到的复杂性.在黎曼考虑这个问题之前,数学家就在问素数在整数中是如何分布的.早期回答该问题的尝试很快使数学家们意识到素数的特殊性,甚至有关它们的十分简单的问题也让数学家们束手无策.

正是素数的这一特殊性才让数学家们如此着迷,而这种特殊性在最难的问题中达到了顶峰.

【7】 米歇尔·贝利是对黎曼假设作出重要贡献的数学家之一.我曾经问过他,年过花甲感觉如何.

他回答说,"60介于两个素数之间,且没有比它更小的数含有更多的素因数.除此之外,并没有什么特别之处."

每天与素数打交道乃是许多研究数论(即处理素数和别的整数的数学领域)的数学家的习惯.为了理解黎曼假设在现代数学中的重要性,我们只能从一个地方——整个整数系的基本材料开始.这和1,2,3,…一样显而易见. 【8】

目　录



1. 黄 金 时 代

> 数学家们试图在素数序列中找出某种秩序，但迄今一无所获.我们有理由相信，这是人类永远无法看穿的秘密.
>
> ——欧拉

数学家试图弄明白素数的奥妙，黎曼假设即源于此. 素数是不能被更小的整数①整除的整数. 它们对我们的数系来说是十分重要的. 布里斯托尔(Bristol)大学的数学家乔纳森·济廷(Jonathan Keating)如是解释：

> "素数就像一块块的乐高(Lego)拼块. 你有一块块的乐高拼块，却不能将它们再分解一次. 最小块的乐高拼块大小不等，但你不能将它们一分为二. 它们就是素数. 你可以用这些材料造房子，你可以造出乐高构型. 那些乐高构型就好像所有别的数，即非素数. 一个问题是：砖块自身是乐高构型吗? 我想说是的，从这个意义上说，尽管素数不同于别的数，但它们是数的一部分——它们是你可以用来造任何东西的数，它们是你不能再分的数."

---

① 精确的说法是大于1的整数.——译者注

素数是下表中印成黑体的那些数. 这张表人人都滚瓜烂熟——数(shǔ)数：

1,**2**,**3**,4,**5**,6,**7**,8,9,10,**11**,12,**13**,14,15,16,**17**,
18,**19**,20,21,22,**23**,24,25,26,27,28,**29**,30,**31**,32,
33,34,35,36,**37**,38,39,40,**41**,42,**43**,44,45,46,**47**,
48,49,50,51,52,**53**,54,55,56,57,58,**59**,60,**61**,…

这张表的意义并不在于素数,而在于别的数. 所有别的数都可以【9】通过将位于前面的某些素数相乘来得到. 例如,6 等于 2×3. 但将别的数相乘却不能得到任何一个素数. 你不能将 19“分裂”成更小的数的乘积(“乘积”在数学上的意思是一个具体乘法运算的结果).

在化学上有一个极为相似的概念,也许有助于强调素数的重要性. 这个概念涉及原子和分子的差异. 原子是组成宇宙中一切物质的基本材料. 从氢到钚,总共有 92 种天然的元素,每一种元素都有典型的一类原子. 这些原子能够粘在一块,它们可以是同一种元素的原子——如许多碳原子聚在一起;也可以是不同元素的原子,如氢原子和氧原子聚在一起. 不论是相同的原子还是不同的原子,它们紧密连接在一起时都叫作分子. 有许许多多不同的分子,数目远远超出 92. 尽管分子的数目不会无限多,但由于 92 种原子可以通过许多不同的方式组合在一起,分子呈现出许许多多不同的形状和大小,因而实际上数也数不完.

从木头到水,从奶酪到粉笔,任何物质都可以用一个公式来描述,这个公式指明了一种特定物质的每个分子精确的原子组成. 取两个氢原子,并将其附于一个氧原子之上,你就能得到一个水分子,因此该分子就表示为 H_2O. 分子越大就越复杂. 一种名叫钠柱石的矿物的分子式为 $Na_4Al_3Si_9O_{24}Cl$,这意味着一个钠柱石分子是由四个钠原子、三个铝原子、九个硅原子、二十四个氧原子和一个氯原子组成.

整数有时也称作计数的数，我们每天都要用到它们. 它们也分成两类，颇类似于原子和分子. 问题是我们通常不会意识到这一点，因为这两类数是混合在一起的. 这就像水、盐、血红蛋白(分子)和氢、碳、铁(原子)包含在同一张表里一样. 这两类整数就是素数和非素数(也叫合数)，就像氢可看作是"素的"，水可看作"合的"一样.

在两种情形中，每一个合数都是组成它的单位的唯一排列. 正如一个特定的分子，如硫酸，是由唯一的原子集合组成——H_2SO_4，即两个氢原子，一个硫原子和四个氧原子一样——一个非素数，如 108 045 是由唯一的一组素数所构成——两个 3，一个 5 和四个 7 乘在一起，你可以将其表示为 $3^2\times5\times7^4$，几乎像这个特殊的合数的一个公式. 没有别的原子组合可以生成硫酸，也没有别的素数组合可以生成 108 045. 关于整数的这个事实叫作算术基本定理，我们可以证明它是正确的. 但有一个重要的差别：原子的种类不足一百，而素数则有无穷多个. 不管你发现了一个多么大的素数，我总能找出一个更大的. 【10】

素数有无限多个，这是人们关于这些特殊的数所建立的最早的事实之一. 自从公元前 3 世纪欧几里得给出第一个著名的证明以来，数学家们在分析素数在数轴(从原点向无穷远处延伸)上的实际分布情况的基础上，获得了数以百计的关于这些数的更精微方面的重要结果.

想像我们都十分熟悉的数，在一条从零到无穷大的直线上一溜儿排开. 你可以将其想像成一条笔直的道路，路上连续不断地排列着房子，直到远方. 每座房子的序号从 1 到无穷大. 有些房子住着一人，另一些房子则住着不止一人. 单人房子是"素数"，他们的门牌号是素数. 多人房子里的居住者均与居住在素数房子里的某个个人有关. 有一个简单的法则决定哪一个家庭成员住在哪里. 如果门牌号能被一个"素数"房子的门牌号整除，那么就有那个家庭的某个人住在那里. 例如，6 号房子住着两个

人：一个和 2 号房子的居住者来自同一家庭，一个和 3 号房子的居住者是一家人.

3 号房子的门牌号不能被其他任何门牌号整除，因此它只有一人，即 3 号家庭成员居住在那里. 4 号房子有两个成员 2 居住，因为 4 是 2^2，能够被 2 整除两次. 但 12 号房子有 2 号家庭和 3 号家庭成员居住——两个 2 号家庭成员和一个 3 号家庭成员.

这似乎是个很笨拙的类比，但它的确有用处. 沿着数字大街，每一座房子里至少住着一个人，当你沿街向前走时，房子里【11】住着越来越多的人，因为它们的门牌号能够被越来越多的素数整除. 当你向前走，沿途经过的房子里住着越来越多的人，可是你仍然会偶然碰到零散分布的单人居住的房子. 不管你走了多远，前方似乎都有新的家庭成员，新的素数舒适地独居着.

数学家们在探索这条奇异的道路时发现了许多令人吃惊的事. 如，素数的分布似乎并没有一定的模式，尽管有某些规律. 除了 2 号和 3 号房子外，绝不会出现两个素数比邻而居的情形. 但是，在许多情形中，两个素数中间只隔着一座多人居住的房子——事实上，人们相信有无穷多个这样的情形. 这就是人们所说的孪生素数猜想，它仅仅是数论中的众多猜想之一，尽管表述起来很简单，可是所有证明的尝试都以失败而告终.

有一些长距离地段，都是多人居住的房子，而不含任何素数. 事实上，你会发现：无论你指定多么长的地段（一百座房子，一千座房子，……），在这条路上总会有同样长的地段，其中的房子都是多人居住的，不被素数所打断. 关于有多少人住在相邻的房子里，似乎并不存在一个法则. 10 007 号（素数）房子的独居者住在 10 006 号房子的隔壁，后者住着一个来自 2 号家庭的人和一个来自 5 003 号家庭的人；它们隔壁是 10 005 号房子，住着分别来自 3 号、5 号、23 号和 29 号家庭的四个人.

观察整数的直线，当你沿该直线向前走直到无穷远时，素数分得越来越开. 这似乎表明你最终可以到达最后一个素数——

从那以后，或许每个数都是它前面更小的数的乘积. 但事实上并没有这回事. 不论你沿着这条路走多远，前面总是有更多的素数，即使是它们被越来越多的多人居住的房子所隔开. 自欧几里得证明这个事实以来，又有许多关于素数无限多的不同证明. 让我们来看其中的一个.

假设有一个最大的素数 L. 如果我们以该假设为出发点，通过一系列逻辑上无可挑剔的步骤，找到一种方法构造出一个比 L 更大的素数，那么我们就证明了原来的假设必定是错误的. 如果我说“条条大路通罗马”，但沿任一条老路出发，却到达了佛罗伦萨，那么我就证明了“条条大路通罗马”这个说法是错误的. 因此，如果我们能够找到一种构造比 L 更大的素数的方法，我们就证明了不存在最大的素数 L. 这样做时我们将完成一种称作“归谬法”的特殊类型的证明. 下面是其中一种方法. 【12】

从所假设的最大素数 L 开始，用所有比 L 小的素数去乘它，得到一个数 C. 显然，这个数 C 不是素数而是合数，因为它能够被任何一个较小的素数整除. 现在，我们把 1 加到这个合数上去. 这一新的数 $C+1$ 是素数还是合数呢? 它若是素数，就没有数能够整除它. 发现事实是否如此的方法是用所有较小的素数一个一个去除它.（我们只需用素数来除，因为不可能找到能整除 $C+1$ 而其素因数却不能整除 $C+1$ 的合数. 例如，如果 21 整除 231，那么 3 和 7 也整除 231.）现在，我们每次用较小素数去除 $C+1$ 时，得到的答案都不是整数. 举一例即可明白这一点. 假设某人说 17 是最大的素数. 如果我们将所有较小的素数乘起来，得到 $2\times3\times5\times7\times11\times13=30\,030$. 加 1，得 30 031. 但我们看得出，30 031 是素数，因为没有更小的素数——因而也没有更小的数能整除它. 如，用 7 去除，得

$$\frac{2\times3\times5\times7\times11\times13+1}{7}=2\times3\times5\times11\times13+\frac{1}{7}.$$

类似地，用其他较小素数去除，可得剩余数 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{11}$ 或 $\frac{1}{13}$.

因此 $C+1$ 必为素数,并且它必为大于 L 的素数.

总之,假设有最大素数 L,我们得出矛盾——一个更大的素数 $C+1$. 我们所用方法适用于任何你随意指定的最大素数. 这就意味着我们原来的假设是错误的:并没有最大的素数——它们永无止境.

当然,这并不是说没有最大的已知素数. 总会有一个的,只要手头有时间的人算出一个更大的素数,或者今天利用更有威力的计算机来做研究. 1876 年,新的记录是

【13】

170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727,

它有 39 位数字,1951 年以前,它一直是人们所认识的最大素数. 1951 年,借助一台由满屋子电子管和电路组成的最早的数字计算机之一,一个更大的素数被发现了. 这个素数有 44 位,但它并没有保持多久的记录,因为 79 位、157 位和好几百位的素数相继被发现.

根据美国数学家朱利亚·罗宾逊(Julia Robinson)的论文中出现的一则新闻剪报[4](图 1),一位芝加哥数学家发现了一个大素数. 这则剪报有点怪. 克里格(Krieger)博士发现的数比利用原始计算机发现的 44 位素数更大,可是他所使用的似乎只有笔和纸. 我没有检查过这个数到底是否素数(像数学课本的做法一样,我把它作为练习留给读者),但是,关于克里格博士,我所能确认的唯一另外的事实是,1938 年,他声称找到了证明费马大定理不成立的一个反例. 五十多年后,英国数学家安德鲁·怀尔斯(Andrew Wiles)证明该定理是正确的.

【14】

自计算机出现之初,寻找大素数对于任何拥有 PC 机的人来说几乎变成了一个无害的消遣活动. 寻找活动变得稀松平常,大素数不断出现. 1998 年,一个名叫罗兰德·克拉克森(Roland Clarkson)的 19 岁的加利福尼亚学生发现了一个新素数 $2^{3\,021\,377}-1$,有 909 526 位. 一个名为 GIMPS(梅森素数互联网大搜寻)的大规模计算机计划利用世界上成千上万台 PC 机在业余时间联网作

Finds Largest Number, But Nobody Cares

By United Press

CHICAGO, Dec. 6.—Dr. Samuel I. Krieger wore out six pencils, used 72 sheets of legal size note paper, and frazzled his nerves quite badly but he was able to announce today that 231,584,178,474,632,390,-847,141,970,017,375,815,706,-593,969,331,281,128,078,915,-826,259,279,871 is the largest known prime number.

He was unable to say offhand who cared.

A prime number is any figure divisible only by itself or 1.

图 1 数学上了标题——关于最新最大素数的系列新闻故事之一.

业,所找到的最大素数是 $2^{13\,466\,917}-1$. 它超过 400 万位数,如果你把它打印出来,它将有 5 千米长.

对于一些数学家,甚至是那些对素数抱有浓厚兴趣的数学家来说,不论何时,花时间去寻找最大素数是不值得的.

"从数学上讲,这几乎没有什么意义,"乔治亚大学的安德鲁·格兰韦尔(Andrew Granville)如是说,"我也算得上是该技术的世界专家之一了,我对你如何着手去寻找一个很大的素数很感兴趣,但除非你能够找到,否则你做这件事是没有意义的.事实是,每次有人找到一个新的最大素数,对他们而言,那只是一个便宜货.他们以为人们会喜欢听这玩意儿.对于有点喜欢数学的人而言,它实际上贬低了数学的价值,因为它的实际计算并无多大意义.有一些计算很奇异,很值得了解,但寻找最大素

数……?”

有一位名叫哈维·杜布纳(Harvey Dubner)的工程师所持观点与此截然不同.他天天都在寻找奇特的、不同寻常的素数，就像一位鳞翅昆虫收集者寻找越来越多的奇异蝴蝶一样.为了书写这些素数,需要采用新的记号来节省笔墨.(数学家总是乐于发明新记号,如果这个记号能把事情简单化的话.)如果单个

【15】数或若干数重复出现多次,就将它们放在括号里,并用下标来表示重复出现的次数.如 144 444 444 444 444 444 443 可以简写成 $1(4)_{19}3$,723 232 323 231 可以简写成 $7(23)_{5}1$.杜布纳的一个目标是寻找有重复数字的素数.这里是他的几个新近的发现.[5] 已知各位数均为 0 和 1 的最大素数是 $(1)_{2\,700}(0)_{3\,155}1$.这个数前面是 2 700 个 1,接下来是 3 155 个 0,末位数是 1.

迄今所知的含 0 最多的素数是 $134\,088\times10^{15\,036}+1$.用我们的新记号,可以将它写成 $134\,088(0)_{15\,036}1$.这个数约占据正常印刷书的 8 页,除第一页开头的 5 个数字以及最后一页最后一个数字 1 以外,全都是 0.请记住,除了写出来看上去很奇怪,它还是个素数,不能为任何别的数整除.

从素数的存在与分布中,还产生了另外有趣得多的问题,许多问题陈述起来十分简单,看上去也显而易见,但要作出证明似乎是不可能的.例如:

> 在两个相邻的平方数之间总是有至少一个素数吗?

很容易对这个问题进行检验,对于前面的几个平方数,结论当然是正确的,如下表所示(素数为黑体,平方数为常规字体):

1,**2**,**3**,4,**5**,**7**,9,**11**,**13**,16,**17**,**19**,**23**,25,**29**,**31**,36,**37**,**41**,**43**,**47**,49,**53**,**59**,**61**,64,**67**,**71**,**73**,**79**,81,**83**,**89**,**97**,…

事实上，你越写到后面，两个平方数之间的素数似乎在增多，因为平方数之间的空间越来越大了．然而，不管你写到哪里，你总得在某个时候停下来．没有证明，你就不能保证：没有两个相邻的平方数，它们之间不存在素数．

素数之间的间隔（gaps）似乎和素数本身一样让数学家着迷．马丁·赫胥黎（Martin Huxley）是一位来自加的夫大学的说话慢条斯理、思维敏捷的数学家．

【16】

“有人告诉我，我小时在街上行走的时候常常读出所有房子的门牌号，”他说．可现在他正在做一件更为复杂的事．

> “我最喜欢的难题是素数之间的间隔．有趣的事情之一是最大的间隔．要花多长时间才能得到一个很长的间隔呢？我们既不能证明存在无穷多个二数间隔（孪生素数问题），也不能证明存在无限多个小于平均间隔的五分之一的间隔．我设法证明了存在无限多个小于平均间隔的0.4倍的间隔．”

“关于素数的难题对他们而言具有很美的特征．”普林斯顿的彼得·萨纳克（Peter Sarnak）说．“这并非是先定义某些带有一系列公理的人为规定的事情，然后问，‘从这些公理能够推出这个结果吗？’素数问题的美在于，你可以随意发明任何事情来解决它们，因而或许有人得到一个方法完全不同的证明——你可以用任何方法来解决这个问题，你可以用任何数学分支，许多数学分支的发明部分就是为了解决相关问题的，因此它们并非与素数问题无关．”

日本大学的本桥（Yoichi Motohashi）是少数深入研究黎曼假设的日本数学家之一．“[素数]充满着令人惊奇的结果，十分神秘，”他告诉我说．“它们就像你能摸得着的东西，就像……，”他向前倾了倾，敲了敲低处的金属灯罩．“在数学上，大多数东西是抽象的，但是我有某种感觉，我能触摸到素数，好像它们是由

真实的物理粒子组成似的. 对我来说,整体上整数就像是物理粒子."

罗格斯大学的亨利克·艾瓦尼克(Henryk Iwaniec)把事情说得很简单."我就是喜欢搞素数,"他如是说,话语中带着一股激情.

20 世纪最伟大的数论家之一是哈代,他一生中大部分工作时间是在剑桥大学度过的. 他这样雄辩地描述自己的工作和对数论的热情:

> "数论在纯数学科学中总是占据着一个特殊的位置. 它在那些应该有能力作出判断的人们中间有着难而神秘的名声. 我觉得没有一种别的数学理论能让这么多的优秀数学家如此害怕. 同时它对于外行的吸引力和对业余者的诱惑力在数学理论中是独一无二的. 在任何别的学科中,几乎不可能写出像兰道的《数论讲义》或狄克逊的《数论史》这样的书,厚厚六大卷,学富五车,比供早餐餐桌上浏览的足球报道还要精彩."[6]

【17】

哈代对于吸引"外行"的数论的估计对于一小部分中上阶级、受过正规教育的人来说也许是准确的,但在今天,很少有非数学家会选择兰道的《数论讲义》作为"早餐餐桌上阅读"的内容(虽然也许会有人这么做,如果另外的选择是阅读"足球报道"的话).

但是黎曼假设的历程却很好地说明了为什么一些数学家会如此害怕数论. 这个学科尽是些看上去经过一些努力就能解决的问题,而实际上这些问题到头来却都是只有通过深入到完全不同的数学领域才能解决的极难的问题. 数论家们因此都有点像三脚猫.

黎曼假设源于关于素数的中心问题. 这个问题人们已经问了几个世纪,如果不是上千年的话. 数学家们一直想知道素数在整个整数列中是如何分布的. 在最前面的 100 个正整数中,25%

是素数. 但在前面的 1 000 个正整数中，比率降至约 17%；而在前 10 000 个正整数中，比率为 12.29%；等等. 许多年来，“等等”乃是一件你根本没有把握的事，因为在一位年轻的德国天才于 1801 年出版他的杰作之前，人们对整数与素数的精确关系甚至都没有任何怀疑.

高斯是鼎盛于 18 世纪末 19 世纪初的一位德国数学家. 他在数学的许多领域都作出了贡献，是一位伟大的数论家. 他对素数的研究在通往黎曼假设之路上迈出了重要的一步. 在高斯 7 岁的时候，他的老师就注意到了他的不同寻常的才能. 一天，老师让全班同学从 1 加到 100. 当其他同学还在做前面几个加数时，高斯已经做好了. 这倒不是因为他有什么速算才能，而是因为他找到了捷径. 他看出可以将前 100 个正整数进行配对如下： 【18】

$$1+100, 2+99, 3+98, 4+97, 5+96,$$
$$6+95, 7+94, 8+93, 9+92, \cdots$$

他意识到共有 50 对，每一对的和为 101，因而共为 50×101. 因此他获得答案 5 050 比其他任何同学都要快得多.

高斯写了一本书，叫《算术研究》，出版于 19 世纪的第一年. 他在书中提出了有关数论的一些新的重要思想. 该书的一个读者是某个“勒布朗(LeBlanc)先生”，他把自己的一些想法寄给了高斯. 这人正是历史上罕见的女数学家之一索菲·热尔曼. 高斯在知道热尔曼是一位女性之后，在一封信中表达了他的惊讶：

> “当我得知我尊敬的通信者勒布朗先生摇身一变，成为这么一个曾经制造出令人难以置信的杰出摹本的名人时，我如何才能描述我的惊讶和钦佩呢？爱好这门抽象的科学，尤其是数的秘密的人如凤毛麟角：这毫不足怪，因为这门崇高的科学只对那些有勇气探究它的人展示其迷人的魅力. 而当一位女性在通晓其中的难题时，由于性别以及我们的世俗和偏见，她遭遇了比

男性多不知多少的障碍，却要克服这些桎梏，洞察隐密奥义，她无疑有着最为高贵的勇气、超凡的才能和卓越的天赋. 这门科学为我的生命增添了许多快乐，没有什么事情能比你对它的爱好更令人心悦诚服、更确实无疑地证明它的魅力并非子虚乌有.”[7]

正是出于这种对“数的秘密”的爱好，才导致高斯对于素数的秘密，特别是它们的分布的思索. 它们的分布是否杂乱无章，就像桌布上的盐粒一样？是否有某个法则告诉你在某个区间内有多【19】少素数——比如说从 1 000 到 5 000，或从 10^{23} 到 10^{24}？

由于在数论的讨论中涉及大数及其写法，因此我要提醒你，10^{23} 指的是 10 自乘 23 次. 很容易把它算出来，因为将其展开时，它有 1 个 1 和 23 个 0. 但可以求任何数的任何次幂，所以 2^{100} 指的是 2 自乘 100 次. 当然，在这个例子中，除了做 99 次运算得到一个很大的数外，并没有其他简易方法将其展开.

高斯的观察证实，随着整数越来越大，素数所占比率越来越小. 这听起来是件难事，但高斯曾经告诉朋友，每当他有 15 分钟空闲时间时，他就会去数每 1 000 个数中的素数. 据估计，到他去世时，他已经计算了约 300 万以内的所有素数.

来自贝尔法斯特、现为哥丁根大学教授的数学家萨缪尔·帕特森(Samuel Patterson)解释了这些数据所揭示的含义. “在最简单的水平上，你像高斯那样开始——在 1 和 1 000 之间，1 000 和 2 000之间等等，直到 100 万或高斯实际到达的数，数出素数的个数. 你会发现这些个数缓慢但很有规律地减小. 然后你开始数直到 1 000，2 000，3 000 的素数个数. 作出图形，你会发现图形十分光滑. 你可以只作一条直线通过它——它很规则——你可以看出它是一个真实的现象. 问题是对于它是否有一个证明或解法.”

高斯看到，对于任意选定的 n，从 1 到 n 的区间上素数个数递增速度要比 n 慢得多. 在 1 和 1 000 之间，共有 168 个素数，但

后面 9 000 个数中却只有另外 1 061 个素数，平均每 1 000 个数中包含 117 个. 当 n 达到 10^{15}时，平均每 1 000 个整数中只有 30 个素数. 高斯还看出，这个变化率正具有对数的特征. 整数的对数递增速度要比整数本身慢得多. 1 000 的对数是 3，10 000 的对数是 4，100 000 的对数是 5，等等.（关于对数和指数，可参阅配套知识 1）

如果你不很明白，你也许会这样认为：当你探索越来越大的数时，素数所占的比率最终会降为 0. 但是，正如我们在前面看到的那样，欧几里得在证明素数有无限多时已经使这种想法化为泡影. 因此，每 1 000 个整数或 100 万个整数中的素数个数的图像将是一条向下倾斜但永不能到达横轴的曲线，在横轴上，个数为零. 高斯考虑了这一点，并试图猜测素数分布所遵循的规律. 他所获得的答案是，它按数学家称之为对数的方式变化. 【20】

想像你家中有个 14 岁大的男孩. 他现在会在干什么呢？看 MTV？看一本关于哈里 · 波特的书？踢足球？在墙上涂鸦？他很可能在做这些事情中的某一件，而不是考虑素数的分布. 但在高斯的论文中，有一张他 14 岁时得到的对数表的复制品. 和今天一样，那时的男孩们常常在课本上乱涂乱写，在高斯的对数表的背面，有笔迹幼稚的涂鸦：

$$\text{Primzahlen unter } a(=\infty)\ a/\ln a.$$

这就是高斯所相信的素数分布所遵循的法则. 今天它被称为素数定理. 用文字来表达，它说的就是：当 a 趋向无穷大（用符号∞来表示）时，小于 a 的素数个数越来越接近 a 除以 $\ln a$ 的值. 因此，小于 100 万的素数个数大致等于 100 万除以 100 万的对数.

高斯所用的对数并不是以 10 为底的对数. 如果是以 10 为底的对数，我们就能说小于 100 万的素数个数约为 166 666，即 1 000 000/6，因为 10^6 为 100 万. 但它不是 166 666——而是 78 499，因为高斯所用对数并非以 10 的幂为底. 他用的对数乃

是以一个在数学的各种方法中都很重要的数，一个用 e 来表示的数. 其值为 2.718 281 828…. 但这种对数的性质是相同的. 若 $A=10^L$，则 A 的对数(以 10 为底)为 L. 类似地，若 $A=e^M$，则 A 的对数(以 e 为底)为 M.

高斯对素数分布行为的观察是十分深刻的. 但那只是一个观察而已. 它无异于观察到无论你取多大的素数，你总能在它后面找到一个素数. 但我们不能把这个结论看作是确定的，因为数到很大的数为人的能力所限. 只有获得一个证明，显示一种能够构造出一个比任何已知素数都大的素数时，我们才能相信，素数有无限多个.

【21】

同样，在作出证明以前，我们不能知道高斯的素数分布法则是否为正确法则. 这个证明直到高斯去世 41 年后才被找到. 那一年，法国数学家阿达玛(Jacques Hadamard)发表了一个证明，说明为什么素数会按高斯提出的方式分布. 事情有时就这么奇怪，一个证明你等了几十年，不出现则已，一出现就是两个. 也是在 1896 年，比利时数学家瓦莱・普桑(Charles de la Vallée-Poussin)发表了素数定理的一个证明，该证明完全是独立于阿达玛作出的.

两人所证明的数学结论实际上是高斯的猜测——当 x 趋向无穷大时，小于或等于 x 的素数个数越来越接近 $x/\log_e x$ 的值($\log_e x$ 表示以 e 为底 x 的对数；如果是以 10 为底，则写成$\log_{10} x$).

详细介绍素数定理的原因是它在素数和黎曼假设之间建立了关键性的联系. 联系在上面定义中所用的"越来越接近"这个术语上，因为该定义并非一个精确的陈述. 你每次对不同的 x 的值，计算小于 x 的素数个数时，你都会得到一个接近正确值但又不是精确等于正确值的答案.(显然，对于较小的 x 值，我们实际上能够数出素数的个数，所以我们能看出素数定理与正确答案相差多远)例如，如果数小于 10 000 000 000 的素数个数，我们会发现共有 455 052 512 个. 素数定理则预测有大约 434 294 493 个. 误差为 20 758 019，它似乎更可能让一个学生受处罚课后留

校，而不是吸引数学界的赞扬．但素数定理所给出的答案误差只有 4½%，这比到 19 世纪末为止任何一个人所能获得的结果都要精确．

在素数定理被证明的时代，黎曼假设已经存在了约 40 年．【22】结果，两个数学结论是有联系的．如果黎曼假设正确，它能导出素数定理的精确公式，而不是总是相差百分之几．你可以重新表述素数定理，说小于 x 的素数个数等于 $x/\log_e x$ 加上另一个相对较小的数．有时人们把它写成：小于 x 的素数的个数等于 $x/\log_e x+\varepsilon$，其中希腊字母 ε 表示另一个数——随 x 而不同——必须加上它才能使结果精确．有了黎曼假设，就能得出 ε 的精确值——如果它是正确的话．【23】

2. 绝妙的东西

我开始相信，没有什么事情比监狱更有助于抽象科学. 我的印度朋友维吉(Vij)经常说，如果他在监狱蹲上6个月或一年，他肯定能证明黎曼假设. 这可能是真的，但他从未获得机会.

——安德烈·韦伊[8]

马萨诸塞州的剑桥克雷(Clay)数学研究所的目标之一是进一步提升数学思维的美、力量及普遍性. 2000年5月24日，该研究所宣布了为证明或推翻黎曼假设而设立的大奖，这是为七大数学难题所设的系列百万美元大奖之一：

> 在考虑授奖之前，所提出的解法必须在世界著名数学杂志上发表，而且发表后的两年内必须得到数学界的普遍认可. 过了两年的等待期，SAB[研究所的科学顾问委员会]会决定一种解法是否值得详细考虑……SAB将特别关注一个获奖解法是否主要依赖于先期发表的方法. SAB在评奖过程中可能[但不一定]会承认这样的先期工作，可能[但不一定]将先期工作的作者列入获奖者名单.

纯数学并非总是与巨款有联系. 但是多年来，已有许多因解决特定的问题或做出杰出的工作而授予的数学大奖. 阿兰·康

尼斯(Alain Connes)教授是研究黎曼假设的顶尖数学家之一. 2001年9月,瑞典的克拉福德(Crafoord)基金会授予他50万美元奖金,仅仅因为他是一名十分优秀的数学家. 对于黎曼假设,很难看出奖金的存在会产生什么样的影响. 一些数学家认为,克雷研究所如果真的想增加发现证明的可能性,它可以用这些钱去做更好的事情. 【24】

加利福尼亚斯坦福大学的丹尼尔·布普(Daniel Bump)教授是其中之一. "若克雷研究所想要激励黎曼假设的研究工作,对百万美元的好得多的用法是设立项目而不是设奖,说'为此原因而工作'. 黎曼假设并不需要百万大奖. 如果人们对于黎曼假设有了思路,即便没有奖金的诱惑,他们也会研究下去,因此我认为该奖将不会对研究工作产生什么积极影响. 它的影响在于产生了社会声誉,所以可能会促成国家科学基金级的基金或类似基金. 怀尔斯证明费马大定理对数学是有益的——使该定理广为人知,出现在《纽约时报》的头版上. 这是让黎曼假设出现在《纽约时报》头版的一种方式,但不是刺激研究的方式,因为人们并不需要百万大奖来研究它或其他任何设奖的问题."

布普教授的办公室在斯坦福大学校园里的380号楼. 他的网页表明,我去拜访的有可能是一位怪人. 在黎曼假设的一些当前工作的链接中,有一个是链接到关于猫的主页的. 布普的主页上的素描显示的是一个头发蓬乱的人,周围是潦潦草草的方程. 事实上,他果真就是这个模样. 他胡子拉碴,交谈时,很快就讲完了黄色便笺簿里好几页的带有示意图的内容.

和艺术家或音乐家不同,数学家通过他所做的数学只能将他的思维品质展示给其他思维相似的人. 但是,我只能通过窥探那些热衷于黎曼假设的人的思想来理解黎曼假设的深刻性,希望由此能够分享到那种热情. 所以对于布普以及其他数学家,我想知道他对该主题的兴趣是如何引导他向这个数学难题的最高峰进军的. 【25】

丹尼尔·布普最初体验到数学的乐趣是在他遇到一种叫作连分数的奇怪分数的时候."我记得在五、六年级时读了一本书,书中有一章是关于连分数的,我对它们感到十分兴奋.那是我记得起来的最早的事情."

以下是一个连分数的例子:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}.$$

如果你从底下算起,可以得到一个确定的值.1 加 1 等于 2,底下的分数成了 $1\frac{1}{2}$.整个分数成了 1 除以 $1\frac{1}{2}$,即$\frac{2}{3}$.你可以向下拓展这个分数,得到更多的分数,它们都只含有 1,对每个分数都可以算出一个值,如:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}=\frac{3}{5},\quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}}=\frac{8}{13}.$$

看到下面的式子,即 1 加上一个连分数时,年轻的丹尼尔·布普产生了浓厚的兴趣.分数永无止境,以人们十分熟悉的三个小圆点来表示.

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}}}}}.$$

在处理开头的几个分数时,我们从底部开始向上算.但这个分数是没有底的.你可以看到它是如何永无止境的.它有一个值吗?如果可以无限地计算下去,最终算出这个连分数,那么是否

存在一个特定的数，它就是计算结果呢？（有关方程的更多知识，参阅配套知识 2）

为了找到该连分数的值（记为 a），我们将它化为能用常规方法求解的方程. 所用方法基于这样一个事实：第一条线下的分数等于整个分数. 一般情况下，部分必小于整体，但这里的部分却等于整体. 这是在无限的情况下出现的事，是黎曼假设中所涉及的数论以及其他理论中的重要概念. 若整个分数的值为 a，则有

$$a=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}$$

$=a$

观察这个表达式片刻. 无论你怎么看，我圈出一部分总是等于整个表达式. 整个表达式等于 a——这是我们希望计算的某个数——并且只要我们不断将这个分数的层次延续下去直到无穷，我们就可以写出一个看上去更简单的新方程：

$$a=1+\frac{1}{a},$$

绝大多数 1 都奇迹般地消失了. 我们得到了看上去比无穷无尽的连分数更容易处理的方程. 该方程是一个普通的二次方程，求它的根意味着找一个数，使得用该数代替 a 时等式成立. 这个数算出来为

$$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

【27】

因此它就是我们前面所讲的无穷连续分数的值.

关于这个过程，还有另外一个事实引起了年轻的布普的注意. 这个数叫黄金中项，除了数学的其他领域，它还反复出现于生物学、植物学、晶体学甚至视觉艺术中.

“他们给孩子们的所有这些数学书中都有关于黄金中项的材料，”布普说，“以及它所具有的神秘性质，那是我所记得的在我 11 岁时激发我对数学产生兴趣的第一个数学知识.”

在这次有趣的交谈过程中，布普从未笑过. 数学对布普教授来说显然是件严肃的事，在我们谈话过程中，我偶尔所作的略带幽默的评论都只消失在空气中，未被认可. 对他而言，唯一重要的事就是数学；在他脑中，根本就没有赢得百万大奖的想法.

别的数学家也赞同布普的看法. “一个真正的数学家无论如何都会致力于对它的研究，”马丁・赫胥黎说，“不论它是否某个人的设奖问题.”

对于牛津大学的罗格・希斯-布朗(Roger Heath-Brown)来说，这是一件与有关同事竞争的事. “恐怕我把所有的数学都看作是一场竞争. 我是个十分好争的人. 我总是想独自证明一个定理. 如果有人证明了一个定理，我总想证明一个更好的定理.”

我去拜访路易斯・德・布兰奇(Louis de Branges)时，他告诉我如果获奖他决定不接受奖金的原因. “我认为布尔西亚(Bourcia)[德・布兰奇的祖先来自这个法国村庄]需要有个数学研究所，该研究所的需要高于我自己的需要，因此我不会去接受这笔奖金……，我还觉得，如果我证明了黎曼假设，我就会受到社会的保护；我的大学会对我另眼相看，他们会留我更久，我会得到比一百万美元更多的利益. 如果我拿了一百万美元，首先我得付出高额的税金；我会被人看作是为了那百万美元而工作的人；或许还有我的一些亲戚需要帮助，如此一来，拿到百万美元会给我的研究带来什么益处呢?”他环顾房间四周. “我或许会改善一下这个房间或我的居住条件，使之含有一流的浴室，一流的厨房. 当然，这很棒，但这不是我的目标.”

【28】

我打算在和德·布兰奇一起的时间里观察他的超然物外的更多证据，但作为一心只想着数学、有时连日常生活都没有的数学家，他并不是独一无二的. 我不想将他归入同一类——那只有等德·布兰奇证明了黎曼假设再说——牛顿也显示了同样的品质：

> 有一次，牛顿在大学里请一些朋友吃饭，他离开餐桌去给他们拿一瓶酒；在去地窖的途中，他陷入了沉思，忘了自己的差事和他的客人. 他回到房间，穿上白色法衣，向小礼拜堂走去. 有时他连衣服都没穿就走到大街上去，发现后又急匆匆跑回去，狼狈不堪. 他在花园里散步时，常常会突然停住脚步，然后迅速跑回房间，站着在他看到的第一张纸上奋笔疾书. 去公共食堂就餐时，他常常出门后就陷入沉思冥想，常常拐错了弯，走了一会儿后，又回到了自己的房间，完全忘了吃饭的事. 有一次，他下马，并牵它上山，马挣脱缰绳，而牛顿浑然不觉. 直到山顶的卡门，他转身想上马，却发现手中的缰绳并没有系着马.[9]

对于今天的一些数论家来说，黎曼假设已经成了与让牛顿忘了吃饭或丢了马的问题一样的难题了. 它简直是最重要的课题.

“这是个一流的难题，”芬兰数学家马提·朱蒂拉（Matti Jutila）告诉我说，“与费马大定理相比，我总觉得黎曼假设乃是真正重要的难题.”

修·蒙哥马利（Hugh Montgomery）告诉我，在数学上，黎曼假设是绝大多数纯数学家都希望得到解决的难题. “它是很多人都研究过的难题，人们知道它有很多结果，它位于一个著名的古老领域即素数研究的核心. 所以，如果你是魔鬼，让某位数学家出卖灵魂以获得一个定理的证明——那么什么定理是大多数数学家愿意得到的？我想它是黎曼假设.”

亨利克·艾瓦尼克是美籍波兰数学家，他讨论黎曼假设时，眼睛发亮.“我愿意拿我所知道的一切数学知识来交换黎曼假设的证明.那是个绝妙的东西.我只是担心，某人给出了证明，而我却看不懂.那是最糟糕的……”

艾瓦尼克显示了别人对于一曲特别钟爱的音乐或一顿稀有的美食才会显示出的高度热情.“结果是奇异的：算术的基本对象——素数的分布.拥有研究这些对象分布的工具——这是黎曼的发现.有许多东西组合在一起.伟大的学者已经作过尝试；你自己也看出这是基本的；美与困难；与如此多的领域之间的联系.我觉得将它称为数学上头号未解决的难题是正确的.”

彼得·萨纳克向我解释了有多少东西依赖于一种解法.“如果这不成立，那么这个世界将是一个很不一样的地方.整数和素数的整个结构将与我们想像的很不一样.在某种意义上说，如果它不成立，则会更有趣一些，但那将是一场灾难，因为在假设它成立的基础上我们已经建立了这么多东西.”

至此，我们已经从数学家那里了解到，黎曼假设说的是关于素数的一些基本事实.简言之：高斯所设计的旨在计算小于任一数 x 的素数个数公式(素数定理)并不十分精确.你若真的算出小于任何一个数的素数的个数，然后与用公式得到的结果进行比较，则总会有几个百分点的误差.故得预测的数加误差.预测的数已经为人们所知，于 1896 年通过素数定理得到证明.而误差的值就是由黎曼假设提供的——如果黎曼假设成立的话.

黎曼是高斯的一个学生，所以他可能知道有关高斯对特殊区间上素数个数的猜测的一切.他可能也已想过，尽管算出小于 n 的素数个数是件好事，但作出更精确的估计则是更好的事.即使 n 大至 1 000 000 000 000 000，高斯公式给出的结果仍然会有约 3%的误差.

【30】 黎曼给出了另一个公式，他认为该公式能给出更精确的结果.我们不妨称之为 RF(n).以 1 000 000 000 000 000 代替 n 时，

黎曼公式给出的小于 1 000 000 000 000 000 的素数个数仍然是不精确的，但误差要比 3%小得多. 事实上，误差只有

$$245/100\,000\,000\,000\%.$$

但黎曼仍不满足. 他根本不希望有任何误差，即使是这个误差小于百分之一的一亿分之一. 所以他在公式上加了一个因子，它是一个无穷级数的和，用数学记号来表示，即为

$$\Sigma 1/n^s.$$

现在，用道格拉斯・亚当斯(Douglas Adams)的话来说，"不要惊慌!"数学符号会很讨厌. 它有时似乎体现了只有数学家才知道的秘密.

摘自罗素和怀特海德《数学原理》中的这段内容(图 2)对于非数学家来说绝对是无法理解的. 事实上，当你读到最后一句时，你才会发现关于 1+1=2 的证明. 怀特海德对数学上使用符号进行了雄辩：

> 数学经常被看作是难懂、神秘的科学，因为它使用了大量的符号. 当然，没有什么比我们不懂的符号更难

✱54·43. $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . ✱54\cdot26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[✱51\cdot231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[✱13\cdot12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . ✱11\cdot11\cdot35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . ✱11\cdot54 . ✱52\cdot1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

图 2 罗素和怀特海德《数学原理》中对 1+1=2 的证明.

理解了.还有,我们一知半解、不习惯使用的符号也是难以理解的.同样,任何职业或贸易的技术术语对于那些从未受过训练的人来说,也是不可理解的.但这并不是因为它们本身很难.相反,它们的引入无不是为了将事情变得更容易些.所以在数学上,如果我们要认真地去注意数学的思想,那么,符号总是能够大大地起到简化作用.[10]

一些数学符号很容易理解,因为它使用了多多少少为日常生活一部分的符号:+,-,×,÷,=,>,<,().但是,即使是这些符号在数学上也会有比通常用法中更为重要的微妙意义.在数学的某些领域,$a+b$不一定等于$b+a$.这是罗素和怀特海德费尽心思证明1+1=2的原因之一.没有什么事情是可以想当然的.(即使在日常生活中,给某人指路时,"向左转然后向右转"与"向右转然后向左转"并不总是到达同一个地点.)英国物理学家亚瑟·爱丁顿(Arthur Eddington)曾经说过,"我们过去常常认为,如果我们知道了一也就知道了二,因为一加一等于二.我们发现,对于'和',必须了解更多的东西."[11]

罗素很喜欢向那些相信2+2总等于4的人灌输疑问:

除了在边缘的情形,你很正确——只有在边缘的情形下,你会对某个动物是不是狗或某个长度是否小于1米感到怀疑."二"必须是某两个东西,"2加2等于4"这个命题毫无用处,除非它具有实际应用.两只狗加两只狗当然等于四只狗,但出现了你对其中两只是不是狗产生怀疑的情形.你可能会说,"哦,无论如何,有四个动物."但有一些微生物,它们是动物还是植物是可疑的."那么,是生物,"你说.但是,有些事物,它们是否为生物体是可疑的.于是你不得不这样说:"两个实体加两个实体等于四个实体."当你告诉我"实体"

【32】

的意义时，我们可以继续上述争论.[12]

甚至连歌德都持有这样的观点："二乘二不等于四，它只是二乘二，那就是我们简称为四的东西. 但四根本不是什么新玩意."[13]

拉图什(La Touche)女士是《数学公报》维多利亚站记者，在她看来，没有什么东西相加时是确定的：

> 再也没有比将算术称为一门精密科学更大的错误了. 有和我一样完全高贵的头脑能够识别的排列和偏离；有普通会计所发现不了的微妙变化；有需要像我这样头脑才能看出来的隐藏的数的规律. 例如，如果你从下往上把数加起来，再从上往下地把数加起来，结果总是不同的.[14]

拉图什女士也许比她自己所意识到的更敏锐，因为在某些数学系统中，加法的顺序会影响最终的结果. 但对于位于小于 n 的素数个数的黎曼修正因子核心的无穷级数来说，情况并非如此.(关于无穷级数更多的知识可参阅配套知识 3)

重新描述一下对于黎曼假设来说十分重要的无穷级数符号：$\Sigma 1/n^s$，符号 Σ(大写希腊字母 sigma)指的是"把后面所有的数加起来"，所以 $\Sigma 1/n^s$ 的意思是"生成一个级数，它的项具有 $1/n^s$ 的形式，s 是某个固定的数，各项中的 n 逐渐递增，把所有的项加起来."你也许会觉得，将无限多项加起来会产生一个无穷大的结果，但事实并不总是如此. 本例中，它依赖于 s 的值. 适当选取 s 的值，这样的过程所给出的结果将是一个固定的数.

所以，黎曼相信，计算 $\Sigma 1/n^s$(记为 S)的值是可能的，但他并不能肯定. 这个结果将是小于 n 的素数个数的完全精确的值.

总结一下：

> 小于 n 的素数共有多少个?
>
> 高斯的猜测：$n/\log n$——误差为百分之几.

黎曼的第一个猜测：RF(n)——误差为百分之一的一部分.

黎曼的更好的猜测：RF(n)减去无穷级数的和 S——此乃关键！

【33】

无穷级数 $\Sigma 1/n^s$ 的和 S 就是所谓的 zeta 函数(或用希腊字母 ζ 表示，即 ζ 函数)，一位名叫欧拉的数学家在 18 世纪 30 年代最早对它作过研究.

像许多数学巨人一样，欧拉为数学而活，当他右眼失明时，他说："现在我更能集中注意力了."[15] 在他的许多业绩里，有一些是非数学的，其中之一是能"从头到尾复述《埃涅伊特》①(*Aeneid*)，甚至能说出他所用版本的每一页上的第一行和最后一行. 在他的一部著作中，有一篇关于力学问题的论文，他自己告诉我们说，是《埃涅伊特》中的诗句给了他第一个想法."[16] 诗中有一行写道："抛了锚后，飞舟停了."

尽管欧拉对素数研究做出了最为重要的贡献之一，他对我们能否理解它们并没有多少信心，所以他很可能不会对数学家在他去世 200 多年后所研究的问题感到惊讶."数学家们试图在素数序列中找出某种秩序，但迄今一无所获，"欧拉写道，"我们有理由相信，这是人类永远无法看穿的秘密."[17]

我们已经看到，欧拉的 ζ 函数乃是涉及整数——从 1 到无穷——以及字母 s 的分数之和. 函数是另一个在日常生活中有一种用法，而在数学上却有另一种很不同的、更特定用法的词. 你可以将它想像成一个黑箱子，有输入口和输出口. 你输入的东西经过某种方式的变换，以不同的输出数出现. 因此，如果输入

---

① 古罗马诗人韦吉尔(Virgil)用拉丁文写成的一部史诗，共分 12 册，叙述特洛伊战争中的英雄埃涅阿斯(Aeneas)在特洛伊沦陷后的经历. ——译者注

一系列数 1,2,3,4,5,6,函数将它们变成 1,4,9,16,25,36,那么你可以称这个函数为 x^2. 在数学上,函数随处可见,它们的功能都一样:一端输入某个数,另一端输出另一个数. 但是,数学家真正感兴趣的是一系列输入数和输出数之间的关系,而不是单个的数对. 他们这样谈论函数的"性态":随着输入数的增大或减小,输出数是否稳定地增大? 它会在某点突然改变性态,趋向无穷或变成零吗? 是否有一些输入数根本没有相应的输出数? 等等. 【34】

关于函数的数学叫作分析,分析的其中一个分支对研究整数十分有用. 它叫解析数论. 查尔斯·梁维克(Charles Ryavec)利用图示来帮助我理解这个过程:

"一次我在旅途中,"他说,"路过黄石公园. 护林员领我们参观这个公园,他告诉我们,一旦你来到这里的温泉边,他会取你的手帕扔进水中,它很快下沉,约 40 分钟后,它又出现了,一切已为你洗好. 这基本上就是解析数论. 接着他说,但是,有人提着一篮子要洗的东西来了,而温泉发生了故障,他们无法为整件事消除故障,而那也是解析数论!"梁维克把头向后一转,笑道,"滑稽的是,你取来数值信息,把它放入函数中,然而函数产生了比你所放入的更多的数,或者它将你所放入的东西进行重组或清理,得到好的结果."

欧拉发现了 ζ 函数(用所有的整数)与一个完全不同的级数(只用素数)之间的关系. 我们已经看到素数是多么地难以预测:它们毫无规律地出现在整数长轴上;在实数的道路上可能会有很长一段没有素数,而接着却有两个(但不是三个)几乎一起出现. 然而,欧拉作出了一位数学家所说的"数学上最引人注目的发现之一". 他发现,ζ 函数可以表示成这样一个级数,其中将所有整数加起来恰好等于包含所有素数的项相乘所得的另一个函数. 所以用同一个 s 值代入这两个完全不同的函数将得到同样的值.

很难想出一个准确的类比来表达这个结果的引人注目之

处，但这颇像——正如我小时候常常想的那样——你可以用字母码将英文译成法文.

如果字母码为 c＝n，l＝u，o＝a，u＝g 和 d＝e，用英文单词"cloud"来试验，当然得到了法文单词"nuage". 如果这种字母码对别的任何单词也成立，那它就非同寻常了("old"在法语中并不是"ane")，但欧拉找到了一种将整数级数翻译成另一素数级数的等价方法，这实在令人惊讶.

【35】

他的发现是

$$\zeta(s)=\Sigma \frac{1}{n^s}=\Pi \frac{p^s}{(p^s-1)}.$$

记住，Σ(大写希腊字母 sigma)指的是级数中各项的和. 在该等式中还有一个 Π(大写希腊字母 Pi)，它表示级数中所有项的乘积，即将它们都乘起来得到的结果.

具体地说，欧拉的发现说的是，如果你把所有整数平方的倒数相加，即

$$s=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots.$$

结果将与含有素数的级数的项相乘所得结果相同，每一项形如 $p^2/(p^2-1)$. 所以，依次用素数 2，3，5，7，11，…代替 p，新级数的第一项为 $2^2/(2^2-1)=4/3$，第二项为 $3^2/(3^2-1)=9/8$，下一项为 $5^2/(5^2-1)=25/24$，再下一项为 $7^2/(7^2-1)=49/48$，等等，取遍所有素数直到无穷. 然后将这些项相乘：

$$\frac{4}{3}\times\frac{9}{8}\times\frac{25}{24}\times\frac{49}{48}\times\cdots\times\infty.$$

这两个明显不同的级数恰好相等，这一事实并不只是个有趣的巧合(就像我所炮制的法语"nuage-cloud"这个例子一样). 对欧拉来说，很明显它是整数和素数之间的一个基本关系，这正是数学家所寻找的作为理解整个数域的工具. (关于这两个级数等价性的证明，参阅配套知识 4)

但是，如果你想具体地知道第 n 个素数或一个你已经知道

的素数之后的素数，那么，这个关系实际上并没有带你走多远. 黎曼所寻求的正是这下一步，他认为可以利用他的新函数——黎曼ζ函数——来接近他的目标. 【36】

让我们回到黎曼公式上来. 我将它简记为"RF(n)减去无穷级数 S". 这最后一项，即用来修正高斯猜测和精确值之间误差的级数 S 之和，使用了黎曼版的欧拉ζ函数. 黎曼设计了他自己的函数，指数 s 具有相当特殊的值(不要与级数之和 S 相混淆)，现在我们把它称为黎曼ζ函数. 这意味着，当你用黎曼公式来计算一个特殊区间内素数的个数——素数的"稠密度"时，答案以某种与黎曼ζ函数的性态相关的神秘方式变化. 黎曼ζ函数的性态与欧拉ζ函数的性态丝毫没有相似之处.

易见，欧拉ζ函数随着 s 的增大而有规律地变化. 如ζ(2)，写出来即

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots,$$

其值等于 $\pi^2/6$，约为 1.644 934 43. 当 s 增大时，$\zeta(s)$ 的值减小，$\zeta(4)=1.082\ 3$. 但黎曼ζ函数的性态完全不同，它波动得很厉害，有时对于 s 的某些值它甚至会等于 0. 那些使黎曼ζ函数等于 0 的 s 值蕴含着素数如何分布的秘密. 这是因为，黎曼ζ函数中的 s 与欧拉ζ函数中的 s 是两种不同类型的数. 黎曼使用了数学家称之为"虚数"的数. 那是一个全新的故事. 【37】

【36】

3. 新数换旧数

虚数是上帝绝妙的求助物，是几乎介于存在和不存在之间的两栖物.

——莱布尼茨

令人十分惊讶的是，虚数在数学领域之外竟是如此鲜为人知. 你无需深入钻研数学就能遇到这些数，莱布尼茨说，"它们的性质很奇怪，但它们的作用却不容忽视."它们也处在许多数学应用的核心，从物理学和电学到天文学和天体物理学. 在黎曼假设的故事中，虚数作为复数系的一部分是极为重要的，倘若没有它们，我们就无法走得更远.

当数学家从某个特殊数系的内部出发，问外部会发生什么的问题时，虚数就在数学历史上经常发生的过程中出现了. 当数学家们意识到旧数已不能满足要求时，这种"如果，什么"的方法可以导致新概念的不断注入. 非数学家有时难以理解这些新概念，其原因是人们普遍相信数学概念在某种意义上说都扎根于日常生活. 对于我们许多人来说，在学校里求解的问题，包括盛水的浴缸，投影的旗杆，挖沟的人，还有，15 年前父亲的年龄是 10 年后年龄的一半，等等，都加深了我们的印象. 算术中的数和几何中的长度对他们来说都有一种可靠的熟悉的感觉. 即使是带有更神秘的 x 的代数，也可以被看作是求诸如你买了 7 个饼，其中 3 个的价钱是另 4 个的 2 倍，要找回多少钱的方法.

【37】



但是熟悉的东西却具有欺骗性. 数学家乐于对熟悉的东西的狭窄范围提出质疑. 如果我们发现浴缸中所剩水的量是-1的平方根,或者你父亲的年龄在5年前是负数,或者我们所作的正方形的平行边事实上是相交的,那么我们就会觉得肯定在方程中丢掉了关键的一步. 但对数学家而言,没有什么是不可以想像的,如果在推理过程中,正确的步骤导致了不熟悉的或者与直觉相悖的答案,他们有时会把它看作是新旅途的起点. 【38】

在数学史上,有很多这种情况. 为了进一步发展某个主题,数学家不得不创造出表面上看来似乎毫无意义的概念. 例如,曾经有一段时间,人们对负数思想深恶痛绝. 对希腊人来说,数都是粗短的、正的东西,通常与可见的对象相联系. 约鼎盛于公元250年左右的希腊数学家丢番图设计了一类方程(今天称为丢番图方程),它们的解均为整数,他并不接受方程的任何我们今天称之为负数的根. 因此,丢番图和他的弟子们认为方程$x^2-45x=250$只有一个根,即$x=50$.(因为$50^2-50\times45=250$)但事实上,在丢番图去世400年后,印度数学家婆罗摩笈多却认为负数也是方程的有效根. 显然,同样的方程$x^2-45x=250$,当$x=-5$时也成立. 这是因为,$(-5)^2=(-5)\times(-5)=+25$,$(-45)\times(-5)=225$(因为两个负数相乘得一正数),且$25+225=250$.

第一次使用负数的成功尝试遭遇到人们的怀疑,因为没有人想像得出负数个石子、苹果或母牛. 但是,尽管人们无法想像负数在现实世界中的意义,它们却能使一些计算更具一致性. 这些新的、在某种程度上有些令人捉摸不定的数的引入意味着一切二次方程(包含x和x^2,但不含x的更高次幂的方程)都有两个解,而以前,当人们只接受正数时,它们有时只有一个解,有时有两个解,有时无解.

尽管早期的数学家知道二次方程,但他们往往并不知道它们总有两个根——即有两个答案代替x后使方程成立. 线性方 【39】

程只有一个根，如 $x-3=0$ 的根为 $x=3$. 但 $x^2-9=0$ 有两个根：$x=3$ 或 $x=-3$. 对于一些二次方程，它们的根并不总是带有不同符号的相同数字. 对于 $x^2+x-12=0$，x 有两个可能的值，它们是 $+3$ 或 -4. 因为早期的数学家没有负数概念，他们发现有些二次方程有一个根，而另一些二次方程有两个根. 对于一个好的数学家，这种不一致性似乎是值得探索的，并可能导致负数的使用.

即使在今天，尽管我们觉得理解负数概念，但是学生在学习负数的运算法则时，如果没有机会理解为什么成立这些法则，那么负数仍将是一个绊脚石. 我们中有多少人会在脑海的模糊深处回想起"负负得正"这个术语呢？

对于露斯·麦克内尔(Ruth McNeill)来说，这个"法则"竟迫使她放弃了数学：

> 让我完蛋的是负数乘负数等于正数的思想. 这看起来根本不可能(现在看起来也仍然如此)——如数学家所说，与直觉相反. 我想有好几个星期，我绞尽脑汁、苦苦思索这个思想，试图从老师、同学、父母或其他任何人那里得到合理的解释. 不论他们给出什么样的解释，都未能消除我那强烈的意识，乘法使某事加强，因而两个负数相乘理应产生一个负数. 后来我得到了一个还算令人信服的解释，即通过放映机倒放游泳池排水的录像. 然而，当时没有什么解释能令我信服. 所有学校科目中最为常识的科目都放弃了常识. 我感到愤怒、困惑. 同时，课程仍在继续. 我知道，我不能落后，不能死抓着负数乘负数问题不放. 我得注意下一个主题，我唯一能做的就是装作同意负负得正. 课本、教师以及社会上代数幸存者的普遍认可显然要比我强大. 我俯首称臣. 我学习余下的代数、几何、三角；我学习那些高

等的章节；当我突然发现一种证明即将出笼时，常常有很棒的感觉. 然而，内心深处却潜伏着怨恨与背叛. 对于数学老师所使的其他任何愚蠢招数，我不再感到惊讶……在智力上，我自由闲散，当数学不再必修时，我转而选择了德文.[18]

【40】

盖尔范德(Israel Gelfand)是一位杰出的数学家，他对数学教育有着浓厚的兴趣. 事实上，他为那些和麦克内尔女士同在一条船上的人们作了如下简洁且可能令人信服的解释：

3×5＝15：

得到5美元3次，即得到15美元.

3×(－5)＝－15：

付5美元罚金3次，即付罚金15美元.

(－3)×5＝－15：

没有得到5美元3次，即没有得到15美元.

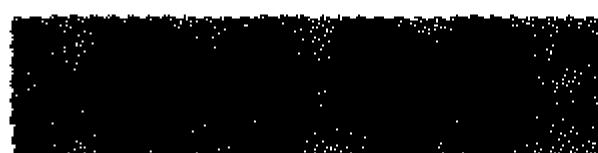
(－3)×(－5)＝＋15：

未付5美元罚金3次，即得到15元.[19]

最令人震惊的数学创新乃是17世纪下半叶由牛顿和莱布尼茨引入的. 他们各自独立地创造了数学的一个新领域，即微积分. 在大部分数学处理的都是离散数字的时代，他们试图研究数学中的连续性. 他们的工作涉及到曲线，这些曲线可以看作由彼此可以任意接近的点构成. 想像曲线上的两个不同的点被连以直线，并彼此移近，则当它们重合时，它们的连线就变成曲线的切线，切于重合的那个点，而不再与曲线交于两点.

为了找出切线更多的性质，牛顿设计了一种称作无穷小量的东西. 当两点相互靠近时，它们之间的距离越来越小——很粗略地说——无穷小量可以看作在重合的瞬间两点之间的距离. 他成功地利用这一“发明”求出了切线的斜率.

18世纪上半叶，贝克莱大主教对无穷小量思想进行了攻



击. 他说,无穷小量与他和其他神学家所持有的、受到科学家嘲笑的一些思想一样不科学. 他写了一篇辩论文章,名为"分析家";或"与一位离经叛道的数学家的对话,检查现代分析的对象、原理和推论是否比宗教神秘和信仰更容易理解,更显然导出.'首先从你自己的眼睛里放出一束光,然后你才能看清楚你兄弟眼中的尘埃'"在嘲笑了微积分思想后,贝克莱继续写道:

【41】

> 我要说,所有这几点,都是某些宗教证据的严格提取者的假定或信念. 这些人自以为只相信眼见为实. 只关心明确意义的人们难以承认模糊的意义,这一点看来也许并非不可解释. 但是,依我看,一个认可"无穷小量"的人就无需对任何神学观点过于拘谨了.[20]

当数学家们开始使用一种称为复数的更怪的一类数,从而在已经包含负数和无穷小量的怪数万神殿中再添新数时,这位主教大人想必会深恶痛绝的.

数学家称我们都熟悉的数为实数,所有实数的集合叫 **R.** 你可以想像这些数位于一条直线上,向 0 点两侧延伸,一侧伸向[正]无穷大,另一侧伸向负无穷大. 这就是我们在第一章中走过的街道,街道上间隔地住着不同的素数家庭. 当我们沿街观察编了号的房子——素数和合数——街道显得相当空旷. 它当然没有表示出我们能想到的所有数字,而只表示出了所有的整数. 但分数又如何呢? 你也许想到了建一座编号为 $3\frac{1}{2}$ 的房子——人们有时在两座房子之间的空地上建房子——但当然没有空间造 $3\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{5}$, $3\frac{1}{6}$ 或 $3\frac{1}{7}$,你也不能填入 $3\frac{83}{111}$,实际上,位于在 3 和 4 之间你可以想像的任何其他无穷多个分数都是如此. 暂且让我们用路边一系列标记来表示它们,尽管插入无穷多个

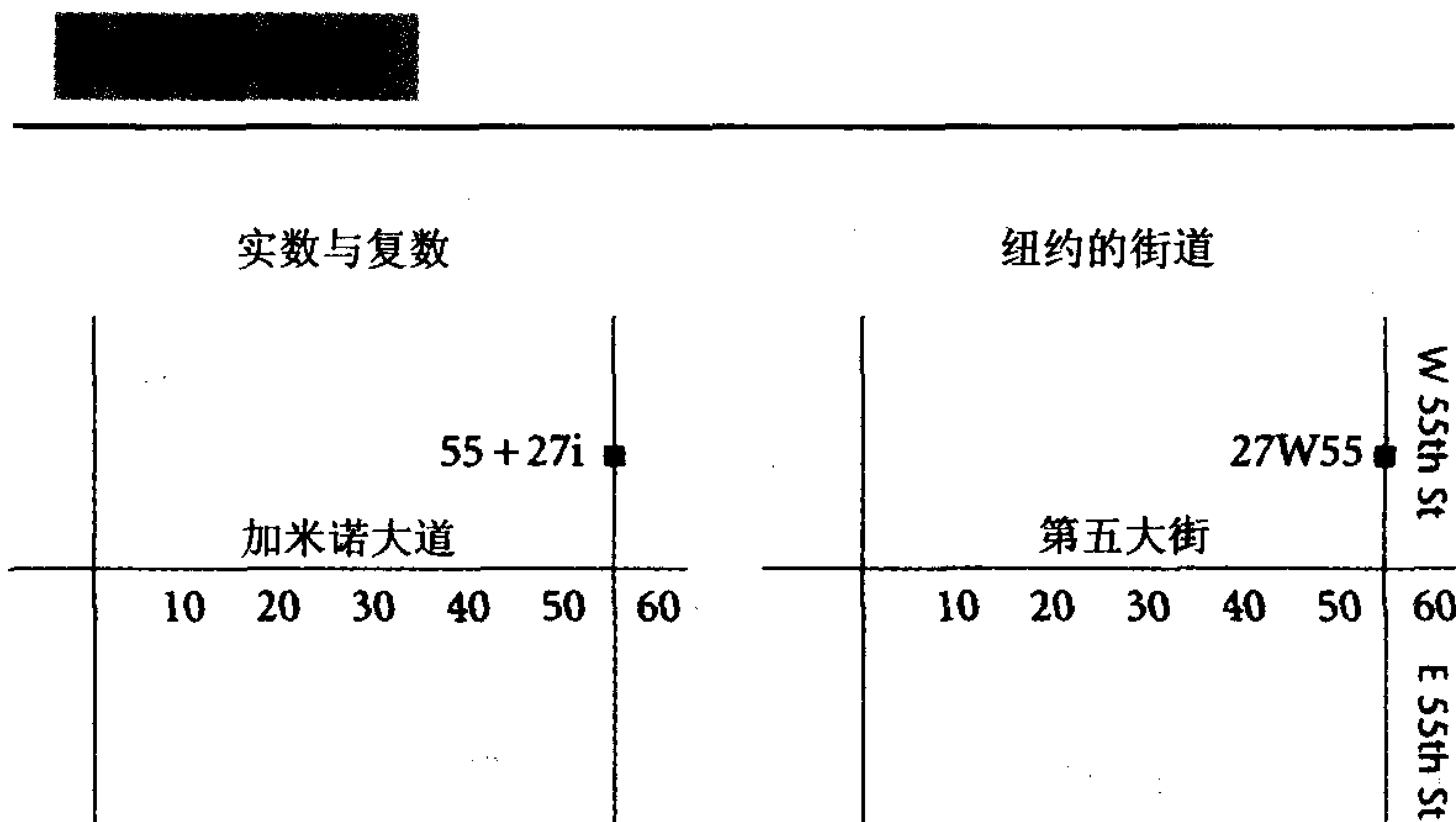
标记并不比插入无穷多座房子容易多少. 但分数和整数都必须位于同一条直线——街道上.

现在来看未知的数. 数学家创造了一类在实数街上找不到的数. 这些数称为复数，它们分散在公路两侧的、我们迄今想像成不毛的、索然寡味的乡村土地上. 不必担心数学家如何、为什么这么做，我们只需知道，这些数位于与实数大街相垂直的街道上. 如果你沿着实数街——不妨称之为加米诺(Camino)大道——向前走，直到 10 这个数，然后向左转，走上另一条街. 这里没有房子，只有地址. 你会发现数 1，2，3 以及 $17\frac{2}{3}$，455.3 和 100 000. 沿着加米诺大道还有别的许多街道，每一条街道上都有许多地址，一直伸向无穷. 当然，许多地址看上去可能一个样. 在每条街道(包括加米诺大道)上，都有数 27，1 729 和 3 000 000. 若要确定一个特殊点作为新房子的地址，我们如何能够给它一个独一无二的地址呢? 现实世界中通常的方法是给街道命名. 但由于在这片乡村土地上有无穷多条街道，我们就得取无穷多个名字.

【42】

数学家想出了一个更好的办法：每个地址由两部分组成. 第一部分是加米诺大道上的点，即侧面街道的起点；第二部分，前面带有表示"虚数"的 i，是侧面街道上的地址. 因此，$55+27i$ 是与大道相交于 55 号房屋的边道上的第 27 个整数. 如果边道穿过加米诺大道，继续延伸到另一侧，编号中将会有负号，所以处在侧面街道下方相应地址上的房子是 $55-27i$. 这与像纽约这样的城市里的门牌编号方式大同小异. 西 55 街第 26 幢大楼的地址为 26W55，这里"W"表示第五大街的西面. 55 街在第五大街另一侧有一幢大楼的地址是 27E55. 所以纽约的第五大街和侧面街道可以看作与实数和复数域相类似(图 3).

可用与实数相同的方式来处理这些数，只要你把所有的 i 放在一起. 你可以把它们加起来，例如，$(a+ib)+(c+id)=a+$



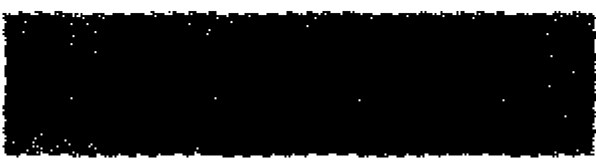
[43] **图 3** 复数表示法(左)与纽约街道上的地址(右)相似.

$ib+c+id=a+c+i(b+d)$. 你也可以将他们相乘，所以 $(a+ib)\times(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd$，还可以写成 $ac+i(ad+bc)+i^2bd$.

i 是个有用的记号. 它使我们能够确定复数在垂直于实数轴的轴上的那部分. 但它在某些类型的方程中所起的作用更大：i 是一个可以用来表示"－1 的平方根"概念的数.

很少有文学作品以专业的方式来讨论数学. 但在德国作家穆西尔(Robert Musil)的小说《年轻的特尔莱斯》中，有一段对话说明了 i 的令人困惑的性质：特尔莱斯和贝尼伯格这两位男生刚从数学课上走出来. 特尔莱斯说：

> "我说，你真的理解所有那些内容了吗?"
>
> "什么内容?"
>
> "所有关于虚数的内容."
>
> "是的，这并不是特别难，是吗? 你要做的只是记住－1 的平方根是你使用的基本单位."
>
> "但问题就在这里. 我的意思是说，没有这样的事. 每一个数，无论正还是负，其平方都是正数. 所以不可能有任何一个实数会是负数的平方根."



“没错.但我们为什么不可以用完全一样的方式来计算负数的平方根呢？这当然不可能产生任何实数，正因为如此，我们把结果称为虚数.这就像有个人过去总是坐在这儿，所以我们今天仍为他放张椅子在这里，即使这个时候他死了，我们仍当作他要来一样，继续做这件事.”

【44】

“但是，当你确信无疑地(像数学那样确定)知道这不可能时，你怎么还会这么做呢？”

“无论如何，你继续去做，就好像并非如此一样.它可能会产生某种结果.毕竟，这与无理数——永远除不尽，无论你花费多长时间算下去，永远永远永远都不可能得到其分数部分最后的值——不同在何处呢？你怎能想像平行线会在无穷远处相交？在我看来，如果我们过于谨小慎微，那么数学就根本不存在了.[21]

乍看起来，任一负数似乎不可能有平方根.根据乘法法则(包括负负得正)，没有什么数自乘后会等于负数.正正得正，负负得正.所以，怎么会有－1的平方根呢？怎么会有这样的数x，满足$x^2=-1$呢？和负数一样，用一个符号来表示－1的平方根在解方程上是有些用处的.

下面是一个产生问题的十分简单的二次方程：

$$x^2+1=0.$$

不必花费太多时间就能得出：代x后使方程成立的数自乘后等于－1.于是方程变为$-1+1=0$，即使不是特别有趣，这也是一个正确结果.但是并不存在这样一个数，其中我们都熟悉的某个数，其平方会等于－1.然而，因为它十分有用，数学家们就创造了一个.与π和e一样，他们用字母i来给它命名.

从某种意义上说，不存在这样的数——至少从我们日常生活中所用的“数”的意义上说不存在.它有点让人感到是一场骗

【45】 局.起初,知道存在某个数的平方等于-1乃是一件颇为有趣的事.你可以想像在一次测验中要回答这个问题,你正襟危坐、冥思苦想,最后,无奈放弃了."我放弃,"你对主考官说,"答案是什么?"他回答说,"是我想出来的一个符号,叫 i,"你的失望无可厚非,就好像他问你哪一种圆有四个角,然后再告诉你答案是方的圆一样.

但有一个重要的差别.一旦发明了 i,从深层的意义上说,有各种各样的情形的确是-1的平方根.当然,随着 i 的开始流行,更为老到的数学家开始看到这些虚数的巨大价值.利用加米诺大道及其无穷多条侧面街道,数学家们想出了一个办法,他们用 i^2 表示-1,使得用与实数一样的方法去用复数成为可能——与加法一样,将它们相乘也能得到有意义的结果.

当数学家创造出新的对象时,他们喜欢构想或发现主导那些对象之间关系的法则.就像有主导实数之间关系的法则——加、减、乘、除运算法则——任何像复数这样的实数以外的新数也应有自己的一套运算法则.关于实数的一个结果是,对实数施以加、减、乘、除四则运算,其结果也是实数.2 加 3 乘 17 除以 8 是一个实数.这听起来好像显而易见,但实际上并不是对所有类型的数都成立的.以整数为例,整数的加、减、乘总得到整数.但除法就不是这样.有时它会产生分数:12 除以 3 等于另一整数,但 11 除以 3 却不是.

这一切都说明:在复数这个新数系中,若将 i^2 解释成-1,则可将两个复数相乘,得到仍在同一个数系中的第三个数.换言之,若将两个地址相乘,则得街道地图上另外某处的第三个地址.我们来看两个地址,如 $3+2i$ 和 $7+5i$,用简单的代数法则将

【46】 它们相乘,即将第二个括号乘以 3,再乘以 2i,然后将所得结果相加.于是

$$3(7+5i)+2i(7+5i)$$
$$=(3\times7)+(3\times5i)+(2i\times7)+(2i\times5i).$$

如果不对 i 作任何改变，只把同类项合并，则得

$$21+15i+14i+10i^2=21+29i+10i^2.$$

我们想得到同一数系中的一个数，即同一张街道地图上的另一个地址. 但我们还不在那里. 因为我们要找的是形如 $a+ib$ 的某个数. 我们还需要另一步. 若在复数 $21+29i+10i^2$ 中以 -1 代替 i^2，则得 $21+29i+10\times(-1)$，它等于 $21-10+29i$，或 $11+29i$. $11+29i$ 是地图上的另一个地址，加米诺大道 11 号处的侧面街道上的第 29 个单位.

关于这些新数，还有最后一点. 它们并非与实数完全不同的另一个数系，因为它们包含了实数. 尽管每个数都有 $a+ib$ 的形式，但当 $b=0$ 时，只剩下该数的实部 a，它正是实轴上的一点.

实际上，这些复数往往不用全部写出来. 一旦建立了加减乘除运算法则，操作起来就会更简单，更抽象，一如单个符号. 若用 z_1 表示 $a+ib$，z_2 表示 $c+id$，则可用 z_1+z_2 代替 $(a+ib)+(c+id)$，z_1z_2 代替 $(a+ib)\times(c+id)$.

让我们暂且停下来总结一下. 我们所讨论的数只不过是数学上许多数系中的一种，事实上，即使在我们熟悉的实数中，也有诸如整数和分数这样的子集(亦称有理数，因为它们可以用比来表示)，但是数学家已经发明了别的数系，它们有时遵循同样的运算法则. 复数处在这些数系之一的核心，有时我们可以用类似于实数的方式对它们进行运算.

下一步对理解黎曼 ζ 函数是至关重要的. 在像我们在第二章中所看到的那种级数中可以使用复数. 尽管它的意义仍不明显，但我们可以在诸如 $1/n^z$ 这样的式子中使用复数 z. 进一步，我们将 z 代入级数 $\Sigma 1/n^z$. 若将该级数写出来，记住 $z=a+ib$，其中 a,b 为实数，即为 【47】

$$1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots,$$

此即

$$1+\frac{1}{2^{(a+ib)}}+\frac{1}{3^{(a+ib)}}+\frac{1}{4^{(a+ib)}}+\cdots,$$

无需担心理解不了该级数的真正意义.这无关紧要,因为我们已经到达了本故事的关键之处.这个级数和欧拉 ζ 函数 $\zeta(s)$ 相似,只不过用复数取代了 s.这是黎曼所作出的重要改变,从而得到了黎曼 ζ 函数.

正是因为黎曼用复数代替实数,即 s 为形如 $a+ib$ 的数,所以黎曼 ζ 函数的性态比欧拉 ζ 函数的性态要神秘得多.由于黎曼 ζ 函数对于用精确结果来代替高斯关于小于 n 的素数个数的猜测起着至关重要的作用,因此,在过去的一百年里,它可能比其他任何数学对象都更加受到数学家的关注.

不仅黎曼 ζ 函数对 100%受过教育的人来说是完全陌生的,而且用来描述它的术语也只是为一小部分专业人士(主要是数学家和物理学家)所理解.这似乎并不奇怪.毕竟,一旦人们离开学校后,他们还记着数学干什么呢?那些记着数学的人通常是理解并喜欢数学的人.其他人会以类似的热情记着他们所学的历史、地理、物理或英国文学.不同之处在于这些科目构成了文明社会日常生活的主流部分,而数学似乎不是.

但情况并非一直是这样的.即使考虑到现代数学更抽象的本质,在过去曾有一段时间,数学被人们看成是一种人人可把【48】玩、人人可欣赏的游戏.符号的障碍并不大.以下是诗人柯尔律治(Sameul Taylor Coleridge)写给他弟弟乔治(George)的一封信:

> 亲爱的弟弟:
>
> 我常常感到奇怪,作为真理精髓的数学只拥有这么少、这么无精打采的崇尚者.——频繁的思索和仔细的检查最终揭开了原因——尽管理性受到款待,想像却在忍受饥饿;当理性在自己的天堂里纵情享乐时,想像却在悲伤的沙漠里疲倦地跋涉.通过想像的刺激来

帮助理性乃是以下产物的设计.在实施过程中,许多可能是有异议的.人们可能会指责诗歌(尤其是颂歌的开头)自由得不可靠;但它们的自由与数学研究的精确性以及品达(Pindaric)的大胆性是相似的.有三勇士就对于《批判》的攻击为我进行辩护:该作品的新颖性、困难性和实用性.我足可炫耀自己,是我第一个从抽象思想的虚幻洞穴中提取了数学的仙女,并使她与和谐联姻.我现在把这次联姻的第一个产儿赠送给你:——我期盼收到你的缪斯更有价值的孩子——

你的柯尔律治

于 Christ 医院　1791 年 3 月 31 日[22]

接着,柯尔律治以押韵的诗句给出《几何原本》第一个命题的证明.这个命题说的是,在已知底边上,用尺规作出等边三角形是可能的.需要仔细地读,开头是这样的:

这是第一个命题,
这是第一个问题.
有一条已知的线段,
水平位置不偏又不倚;
我要作一个三角形,
三边的长度不差毫厘.
设已知的线段为 AB,
水平位置不偏又不倚;
伟大的数学家,
设置了这个问题:
在其上作出三角形,
三边的长度不差毫厘:
理性,助我们一臂之力;
智慧,助我们一臂之力![23]

【49】

后面的证明用了好几段，尽管它不是柯尔律治最好的诗句，但今天我们大多数人都为之感到惊讶.

柯尔律治的诗歌中有两点是很有趣的.其一，它说明了用文字表达数学思想事实上是可能的——不过更加繁琐一些，而用了符号就更简洁.其二，像柯尔律治这样重要的诗人会对数学感兴趣.他的一些朋友却颇不一样.当济慈、华兹华斯和兰伯在1817年11月，即柯尔律治作诗26年后一起就餐时，他们为“牛顿的健康和对数学的困惑”干杯.[24]华兹华斯抱怨，尽管牛顿很浪漫，但他也是“除非像三角形三边一样清楚，否则什么都不信的家伙”，[25]他由于解释了彩虹在雨滴光学性质上的起源而破坏了它的美丽.在那次宴会和干杯的3年后，同样持有上述悲观看法的济慈写道：

> 哲学剪去了天使的羽翼，
> 用法则与直线控制了所有的神秘.
> 清空了鬼魅的空气，
> 拆开了彩虹的瑰丽.[26]

柯尔律治的观点和兴趣与那个时代的精神是一致的：受过教育的人们并不蔑视数学的崇高，甚至从练习坡地上获得乐趣.每当约翰逊(Johnson)博士①“感觉他的想像力发生混乱时，他不断重复去做的事就是研究算术”[27].拿破仑，“每当他稍有空闲时……，常常阅读一本对数书，他总是从中找到乐趣”[28].托马斯·霍布斯②(Thomas Hobbes)“开始学习几何时已经40岁了；事情很偶然.他在一位绅士的图书馆里看到欧几里得《几何原本》打开

【50】

① 塞缪尔·约翰逊(Samuel Johnson，1709—1784)，18世纪英国著名诗人、作家和评论家，编有《英语辞典》、《莎士比亚集》，作品有长诗《伦敦》等.——译者注

② 托马斯·霍尔斯(Thomas Hobbes，1588—1679)，17世纪英国著名哲学家，著有《利维坦》、《论物体》等.——译者注

着，正好在毕达哥拉斯定理那页上. 他读了那个命题. “天啊，”他说，“这是不可能的. ”所以他读了定理的证明，证明用到了前面的另一个命题，于是他又读了那个命题. 而那个命题又用到前面另一个命题，于是他又读了这个命题. 最后他终于对毕达哥拉斯定理深信不疑. 这使得他对几何学产生了爱好”[29]. 即使是 19 世纪一位卑微的乡下牧师也“从拉克洛瓦(Lacroix)的《微积分》中找到乐趣，并因而为自己的事业找到了提神佳品. ”[30]

显然，很久以前，受过教育的人们并不耻于将数学纳入他们的文化生活之中. 他们发现，学习数学是件有益的事. 即使在今天，偶然也有在别的某个生活领域十分著名的非数学家发现数学的乐趣. 亚提・萧(Artie Shaw)是位杰出的爵士乐作曲家和演奏家，他突然放弃公共演出，全身投入到自学之中. 在他所钻研的学科中就有数学：

> 在我学习数学的所有时间里，我都有一种确定性的惊人感觉，一种逻辑绝对性的感觉. 当我学习它的不同分支时，似乎生活在完全安全的氛围之中. 比如，我还记得参加考试时我所具有的那份绝对的自信. 对于那些结果，我的脑中从未有过任何怀疑. 结果本身证实了我的想法. 从来不曾有过任何及格与不及格的问题——因为你要么知道这个学科(这种情况下根本就不会有任何疑问，因而会得满分)，要么不知道(这种情况下你没有必要去参加考试，直到学完为了解它而必须学习的内容)；因为数学学习以某种奇怪的方式给了我所知道的唯一实实在在的安全感，所以我感受到了在我整个生命里从未有过的那种精神上的快乐. [31]

对于非数学家来说，自己发现数学所带来的智力上的满足感是很少见的. 但对于数学家来说，那是追求他们事业的最早和最持久的动机.

4. 印 度 之 夏

我要你们做的最后一件事是举起手大声宣布"这里有一些难以理解的东西，一些古老东方智慧的神秘迹象！"——我想展示给你们的画像乃是一个你可以和他一起喝茶——一个碰巧是大数学家的理性人物的画像.

——哈代论拉马努金[32]

1900 年，在德国大数学家大卫·希尔伯特(David Hilbert)的一次著名演讲中，黎曼假设获得了新的重要地位. 一位十分雄辩但却脾气古怪的数学史家贝尔(E. T. Bell)在提到希尔伯特时指出，数学家不论怎么伟大，永远都不能成为别的科学家如爱因斯坦那样著名：

> 这是一个合理的猜测：如果在纽约或芝加哥或伦敦或巴黎或莫斯科或东京的大街上随机挑选出 100 000 个人，那么这些人中无一会知道这个人的名字，而从 1912 年左右以后，专业数学家几乎一致公认他是数学界最顶尖的成员. 他死于 1943 年，死时默默无闻；但即使大街上(或一个文化社团里)的一个普通人永不可能听说他的名字，他的名声也是安全的. 在随机的 10 万人中，许多人能立刻说出一个对人们称之为数学家感到深恶痛绝的理论物理学家的名字.[33]

1900年夏，在巴黎举行的第二届国际数学家大会上，希尔伯特应邀作了一个重要演讲. 对这样一个重要场合，到场人数却是令人失望的. 来自世界各地的一千名数学家来到巴黎，许多人带着家属——据说一部分人是因为巴黎将举行百年展览会才去那里的——只有250人左右在8月的一个酷热的上午来到演讲厅. 这个人数比预期的要少，因为希尔伯特耽误了时间，演讲稿递交得太迟了，因而没有按原计划被列入开幕式演讲中. 若知道这个演讲在未来一百年有如此重要的意义，那么一定会有许多数学家事后希望他们当时去了演讲厅.

【52】

希尔伯特的传记作者康斯坦斯·里德(Constance Reid)描述了那天希尔伯特的外表：

> 那天早上，登上演讲台的那个人不到四十岁，中等身材，精瘦结实，动作敏捷，前庭宽阔，除了几缕微红的头发外几乎是秃顶. 坚挺的鼻梁上紧紧架着一副眼镜. 一小撮仍有些蓬乱的胡须，其下是一张较之纤细的下巴显得异常宽大的嘴巴. 在闪闪发亮的镜片之后，一双明亮的蓝眼睛单纯而坚定地向外看. 尽管演讲者的外貌朴实无华，但他却有着惊人的专注和智慧……为照顾那些不熟悉德文的人，他慢慢地、仔细地开始了他的演讲. [34]

但是，他要讲的如此重要的内容到底是什么？

希尔伯特决定利用这个新世纪的场合来展望一下数学上尚未解决的课题，并探讨问题对于数学的一般价值. 他相信"一门学科只要提供丰富的问题就会充满生机；缺乏问题就意味着死亡."

> 很难并且常常不可能提前正确判断一个问题的价值[当希尔伯特开始向听众详细展开他的思想时，他说道]，因为最后的裁决依赖于科学从该问题中所获得的益处. 尽管如此，我们可以问：一个好的数学问题是否有一般的判别标准. 一位法国老数学家说："只有把一

> 个数学理论研究得十分清晰，以至于你能把它解释给在大街上遇到的第一个人时，这个数学理论才能被看作是完善的."这里强调的是一个数学理论的清晰易懂.而一个数学问题要完美，应该要求它更加清晰易懂；因为清晰易懂的东西能吸引我们，而复杂的东西则让我们望而却步.此外，一个数学问题若要吸引我们，就应该难一些，但并不是可望而不可即，否则我们的努力将付之【53】东流.对我们来说，它应该是通向隐藏着的真理的曲折道路上的路标，最终将让我们享受成功的喜悦.[35]

如果有一些"街上的男人(或女人)"坐在演讲厅里，那么他们不可能会在希尔伯特所描述的十个未解决问题的目录中找出多少"清晰易懂"的内容.希尔伯特希望这些问题在20世纪的某个时候得到解决.(他的讲稿中实际上选了23个问题，但他只来得及讲其中的十个.)这些可不仅仅是报纸疑难版上的智力难题.每一个问题都来自当时的某个重要数学领域.希尔伯特相信，如果它们被解决了，那么它们的解将在新的、充满希望的方向上促进该领域的发展.以下是希尔伯特清单上的前几个问题：

1. 康托的连续统基数问题.
2. 算术公理的相容性.
3. 等底等高的两个四面体的体积相等.
4. 两点之间直线最短问题.

尽管问题4是用我们能理解的文字来表述的，但它比听起来显然要重要得多.为什么会有两点之间直线最短的问题呢？事实上，希尔伯特在他出版的演讲稿中对该问题重新作了表述，它原来的清晰性荡然无存，变成"寻找这样一种几何，其公理最接近欧氏几何的公理，如果保留次序公理和关联公理，减弱合同公理，取消等价于平行公设的公理"，这或许更接近那种非数学家希望从数学前沿中看到的高深莫测.



> 所提问题[希尔伯特告诉听众说]仅仅是一些样板而已；但它们足以说明今日的数学科学，其内容是多么丰富，其形式是多么繁多，其范围是多么广泛. 这不禁使我们想到这样的问题：数学是否注定会重蹈其他科学的覆辙，分裂成彼此独立的分支，各分支的代表人物之间隔行如隔山，它们之间的联系越来越不紧密. 我不相信，也不希望有这种事发生……数学的有机整体是该学科本质所固有的，因为数学是关于自然现象的一切精密知识的基础. 只要新的世纪给它带来天才的先知与热情的信徒，它完全可以实现这一崇高目的！[36]

【54】

我们可以将希尔伯特的问题分成三类：(1)在希尔伯特生前被解决的问题——他于 1943 年去世；(2)经过了艰苦努力最终获得解决的问题，有些是在希尔伯特演讲近 100 年之后；(3)尚未解决，或许永远解决不了的问题.

希尔伯特的第三个问题属于第一类，该问题在他演讲两年后就被他的一个学生所解决. 第四个问题解决于 1910 年，第十一个问题解决于 1923 年，第十七个问题解决于 1926 年，第九个问题解决于 1927 年，第二个问题解决于 1931 年，第七个问题解决于 1934 年.

第二类问题包括关于丢番图方程的第十个问题，丢番图方程是未知数为整数的方程. 美国数学家朱丽亚 · 罗宾逊(Julia Robinson)多年致力于希尔伯特第十问题的研究，她对该问题在她一生中的重要性作了十分感人的叙述：

> 在整个 20 世纪 60 年代，除了发表几篇其他方面的论文外，我一直在研究第十个问题，但我感到十分失望. 我们家有个习俗，每逢谁过生日，都要有一个聚会. 年复一年，当轮到我吹灭生日蛋糕上的蜡烛时，我总是许愿，第十个问题会被解决——不是说我

解决它，而只是说它会被解决. 我觉得，如果不知道它的答案，我会死不瞑目的.

1970 年 1 月 4 日，马蒂亚舍维奇(Yuri Matijasevich)在他 23 岁生日前的两个月，终于成功地给出证明……希尔伯特第十个问题的这个人们期待已久的答案，结果是否定的.[马蒂亚舍维奇是一位在列宁格勒工作的俄国数学家，他在证明中利用了罗宾逊的一个猜想.]我听到这个消息时十分兴奋，很想立即打电话到列宁格勒，核实证明是否真的是正确的……在我第一次听到这个消息之后一个星期，我写信给马蒂亚舍维奇："……现在，我知道它是正确的，它是漂亮的，它是精彩的. 如果你真的是 22 岁，那么我感到特别高兴的是，当我初次作出这个猜想时，你还只是个婴儿，我只得等你长大成人!"那年，当我吹生日蛋糕上的蜡烛时，吹了半口气便停住了，我突然意识到，我许了这么多年的愿已经变成现实了.[37]

【55】

在希尔伯特去世后被解决的还有费马大定理，怀尔斯于 1996 年证明它是正确的. 该难题在复杂性和难度上与黎曼假设最接近，并且和黎曼假设一样，多年来一直是数论专家们孜孜以求的目标. 怀尔斯十岁时第一次遇到这个难题，成为数学家后，他决心独自找出证明. 三十年间，他独自思考这个难题，拒绝与任何人合作，寻求的是单打一的满足感——或许还有名声.

希尔伯特的第三类问题是尚未解决的问题，其中包括第八问题，可简单表述为"素数问题(包括黎曼假设)".

修·蒙哥马利描述了希尔伯特简单描述背后的东西."希尔伯特有一个综合的难题，它问的是关于素数的所有可能的问题. 很难说你可以解决它，除非你证明了黎曼假设和孪生素数猜想

等等，但……当时我认为，它很快就会被解决. 没有理由认为，它将成为这些在附近徘徊的难题之一. 很难推测数学未来的发展——你看一些曾经未得到解决的难题，可以根据该领域新近的进步与思想以及一些表面的困难等等对事物将遵循的次序进行猜测，但这样的推测往往过于宽泛. 希尔伯特于 1931 年给德国数学会作了一次著名的演讲，大致是说，他认为黎曼假设将在他有生之年被证明，但需要很长时间——我不知道他是否说过，要到人类访问星球以后很久，才会有人知道 $2^{\sqrt{2}}$ 是个超越数①. 三年后，有两个人用彼此独立的方法证明了 $2^{\sqrt{2}}$ 是超越数. 希尔伯特于 1943 年去世，但直到现在我们仍然没有证明黎曼假设." 【56】

如果我们相信在数学界流传的一个故事，那么对于希尔伯特来说，黎曼假设就是他所有问题中最重要的. 根据德国的传说，十字军东征期间，巴尔巴罗萨(Barbarossa，即德意志国王、神圣罗马帝国皇帝腓特烈一世)死后被葬在一个遥远的坟墓里. 谣传他仍然活着，只是睡着了，有一天他会醒来，把德国人从灾难中拯救出来，即便是在 500 年之后. 一次有人问希尔伯特，"假如你能像巴尔巴罗萨那样在 500 年之后复活，你会做什么?"他回答说，"我会问，'有人证明黎曼假设了吗?'"[38]

当希尔伯特于 1900 年发表其重要演说时，三位后来生活、工作密切交织的数学家分别为 23，15 和 13 岁. 他们分别是哈代、李特伍德和拉马努金. 哈代在他收到的写于 1913 年 1 月 16 日、寄自马德拉斯的一封工整的手写信中第一次看到拉马努金的数学. 作为一名顶尖的英国纯数学家，哈代经常收到狂怪们证明诸如化圆为方和三等分角这样不能证明的数学难题的信件. 拉马努金信中

---

① 超越数既不是整数，也不是分数，也不是诸如 $2-x^2=0$ 那样的代数方程的根. 有几个非常著名的超越数，像 π 和自然对数的底 e；但事实上还有很多更不为人知的超越数. 可以证明，在实数轴上，超越数远远多于任何其他数. 数 $2^{\sqrt{2}}$(2 的 $\sqrt{2}$ 次幂)是一个整数的无理次幂. ——原注

的数学要高出一筹，但依然无可厚非的是，哈代并没有放下所有事情对它进行详细分析，因为拉马努金提出的其中一个结果是“准确表示小于 x 的素数个数的函数”——如果该函数是正确的，那么它应等价于那时刚证明不久的素数定理.[39] 此外，拉马努金给出的证明——如果正确的话——是完全不同的，并且要简单得多. 这种数学才智意外地出现在马德拉斯港一个年轻职员身上的可能性是相当小的. 拉马努金对于素数定理的证明是错的，但他信中的其他部分数学内容都很精彩. 最后，哈代安排拉马努金去剑桥，在那里，从 1914 到 1919 年，这两个人和哈代最密切的合作者李特伍德一起研究数论，这对理解黎曼假设是必不可少的.

哈代和李特伍德对数学都怀有极大的热情，别的事情几乎【57】一概不沾，除了哈代偶尔玩玩板球以外. 他们都是剑桥大学三一学院的研究员. 三一学院创建于 1546 年，是那些超凡脱俗的学者们的乐园，他们在那里从事专业研究，无需购物、无需铺床叠被、无需走几码路往返提供好饭好菜的食堂. 然而，没有人比哈代更不食人间烟火了. 据基督学院英文研究员斯诺说，哈代“对小机械装置持有病态的怀疑(他从不使用手表)，特别是对电话. 在他的三一学院的房间里或圣乔治(St George)街区的房子里，他常常以一种不以为然、带点恶毒的腔调说，‘如果你在电话里自命不凡，那么在隔壁房间里也有一个这样的人. ’”[40]

甚至在 20 世纪 80 年代，当我和一位同事访问三一学院，为一个电视节目搜集有关拉马努金的资料时，有一位教师对我的同事说，“电视？电视？我相信在老教师休息室的角落里放着一台，但不常点燃. ”这种把电视机与火炉混为一谈的能力与哈代本人不相上下.

哈代和李特伍德写了许多数论方面的重要论文，有些是两人合作完成的，有些则是各自独立完成的. 丹麦数学家波尔(Harald Bohr)是他俩的密友，他谈到：

> 一位很出色的同事曾经开玩笑说："现在只有三个真正伟大的英国数学家：哈代，李特伍德以及哈代-李特伍德."最后一个指的是两位同样杰出、却有完全不同个性的科学家多年的绝妙合作.这种合作造就了十分重要的成果以及全新的方法，而且远不止数论这个领域.从那些门外汉看来，他们也几乎融为一体了.[41]

尽管他们住在同一个学院，他们却常常通过书信来交流，信是通过学院的门房传递的，在信中，他们称呼对方为"亲爱的哈代"、"亲爱的李特伍德".他们对数学极其认真，但偶尔也会有学究式的风趣.李特伍德有一次这样评论哈代：

> 深受一代学生喜爱的（戴德金分割中的）字母 L，R 是我引入的.而在《纯数学》①的第一版中，它们是 T，U.最新的版本中优雅地提到了我，但当我告诉哈代，他应该指出我的这个贡献（他已经忘记了）时，他拒绝了.他的理由是，提这么一件鸡毛蒜皮的小事简直是对人的侮辱.（这是人们熟知的压迫者的回答：受害者想要的并不是他最感兴趣的.）[42]

【58】

但谈到数学时，没有一点轻薄.对这些人来说，数以及对于数所能做的事情乃是宇宙间最令人兴奋、最重要的事情.李特伍德在描述他的学生时代时这样写道："考试前几个星期，大约在复活节期间，我第一次碰到波雷尔（Borel）系列[数学教材系列]的前几卷，事实上，正是下面这些内容第一次给了我一种真正的震撼：正项级数，发散级数，以及整数函数那一卷."[43]这种热情伴随着一丝不苟的诚实，这不仅仅在做数学研究上是如此.李特伍德对他在一次大学数学测验中试图解决的一个问题作了如下评论：

---

① 哈代写的一本书.——原注

没有算出结果，再做一次还是没有。我获准去拿更多的草稿纸；当我经过一张课桌时，我的眼光停留在这个问题边上一个重重的记号上。那个考生并不是一个拔尖的人物，我下意识地推断，我是在小题大做；于是这个问题很容易就被解决了。聪明绝顶的人无疑不再作进一步的尝试；我希望自己这样做过，不过这个过错并未让我受到太重的良心责备。[44]

李特伍德初次接触黎曼假设发生在希尔伯特演讲四年之后。当李特伍德还是一个大学生，还没意识到该问题的重要性——或难度时，他的关于"零次整函数"的50页长的论文给他导师留下了深刻的印象，导师于是让他接着证明黎曼假设。后来，李特伍德这样描述自己接受这个任务时的反应：

【59】

事实上，这个豪迈的建议并非毫无结果。我在林德洛夫(Lindelöf)的书①中看到了ζ函数，但书中没有素数内容，我也丝毫不知道两者之间有何联系；对我看来，黎曼假设虽然很有名，但它只是整函数中的一个问题而已；所有这些都发生在暑假，即使我怀疑有一些联系，我那时也没有文献可读。

我还记得欧拉公式②；在学校里我们把它当作一个玩笑(完全恰当并且极有趣味)来学习的……根据欧拉公式，研究$P(s)=\Sigma p^{-s}$是很自然的事。我很快看出，如果"在$\sqrt{x}$的误差范围内"素数定理是正确的，那么黎曼假设成立。那时，对任何不熟悉文献的人来说，没有理由期望素数中的任何恶作剧……因此，我带着极大的兴奋和自信开始了我的研究，仅仅经过一两周的煎

① 一本数学教材。——原注

② 这个公式将整数和素数联系起来，第2章中已做过介绍。——原注

熬,我开始意识到事情的真相.[45]

李特伍德开始"痴迷于这个难题",在他的学术生涯中,他花费很多时间去研究黎曼 ζ 函数和黎曼假设,在此过程中证明了好几个相关的结果.在他大学时代初次接触这个问题的65年后,李特伍德寻求三一学院的匈牙利研究员贝拉·勃洛巴斯(Bela Bollobas)的帮助,讨论放在桌上考虑的许多"证明"中的一个:

> 1971年,有人向伦敦数学会递交了一篇论文,声称是黎曼假设的证明.作者也给李特伍德寄了一份.一开始,李特伍德很有耐心.但几个月过去了,编辑们仍抓住这篇论文不放.它或许是正确的吗?李特伍德越来越苛刻,于是我把这篇论文拿到数学系散发,甚至给[学会]会刊的编辑去信.我运气不佳:没有人愿意浪费时间去看那些复杂(并且有些老套)的公式.最终,我只得应李特伍德的要求,开始一起读这篇论文.我对这些公式一窍不通,而让我吃惊的是,他对它们却十分熟悉.经过数小时煞费苦心的研究,他终于发现了一个错误.但故事并未结束.大约一星期后,我得到了审阅人的报告,报告指出了一个子虚乌有的错误.[46]

对哈代而言,黎曼假设也是一个至关重要却又捉摸不定的目标.有一年,哈代新年决心清单上的第一个目标就是"证明黎曼假设".还有另外5个不可能实现的目标,相比之下,黎曼假设的证明听起来更容易一些.它们是: 【60】

2. 椭圆形板球场上进行的决赛的第四局中,不让211出局.(211在板球运动中没有特别的意义,但它是一个素数.)

3. 找出让公众信服的上帝不存在的论据.

4. 成为第一个站在珠峰之巅的人.

5. 被宣布为英国和德国的第一个苏联总统.

6. 谋杀墨索里尼.[47]

当这个睿智的、苦行僧式的英国人遇到拉马努金时,他的生活改变了.

当我住在伦敦时,我常常驾车沿上里士满(Richmond)路行驶,当我经过名为柯里内特(Colinette)路的转弯处时,我总会想起哈代和拉马努金.那是一条普通的郊区街道,两边是住房,其中许多现在被分成了公寓.柯里内特路 2 号本是个普普通通的地址,但房子本身却是一段数学史上的风景.1919 年,它是一家疗养院,一个重病患者在那里安静疗养康复的地方.有一天,哈代来这里拜访拉马努金.经过数年的疑难病(或许是肺结核),拉马努金的身体变得很虚弱和疲惫,有人说,由于战时的英国无法满足他要的印度饮食,因而病情加剧了.

据说"每个正整数都是他的一个朋友"[48],当哈代突然来拜访他时,拉马努金证明了这一点.哈代来时乘一辆伦敦出租车,车号为 1 729,当他走进拉马努金的房间时,他说,这辆出租车的车号是个没有意义的数.对此,拉马努金回答说,"不,它是一个非常有趣的数.它是可以用两种不同方法来表示的两个立方数和中的最小数."

【61】 这个故事是哈代文集中讲述的,C. P. 斯诺在哈代所写的关于自己的生活和数学的流行小书《一个数学家的辩白》序言中再次提及[49],现在它成了数学传说的一部分.近年来,这个故事获得了一层几乎是神秘的光环.

"我一直着迷于拉马努金和数 1 729 的故事,"数学家大卫·亚希(David Ash)写道.大卫·亚希"向包括弗雷德里克·伦茨(Frederick Lenz)博士在内的好几个佛学大师学习过",[50]他最近又讲述了这个传说.

"1992 年晚些时候,"亚希继续写道,"我在加利福尼亚的圣何塞火车站为外出休短假的导师送行.我们在车站聊了一会儿,然后我就回到自己的汽车里.有趣的是,我看到车站外的一辆出

租车，牌照上有几个字母和数字 1 729. 那是我第一次看到带有数字 1 729 的出租车，由于我对拉马努金的着迷，我觉得那是一个很强烈的预兆."[51]

当我第一次听到 1 729 的故事时，我和许多人一样对拉马努金头脑反应的敏捷感到惊奇，把它想像成一把十分锋利的水果刀，嘘嘘地穿越把所有立方数对相加的过程，直到"ching!"——有两对数 1^3+12^3 和 10^3+9^3 产生了这个结果. 此外，找不到更小的数，具有上述结果. 事实上，当我对这个数进行更多的解读时，最大的困惑不在于拉马努金怎样认识到它的不寻常性质，而在于为什么哈代这个英国最大的数学家却没有想到.

这个数意外地与边缘基础网(Edge Foundation Website)上的数学有一丝联系. 查尔斯 · 西蒙尼(Charles Simonyi)是微软的一位顶尖的计算机工程师，他写道：

> 至于拉马努金数 1 729：当费曼(Richard Feyuman)用心算与日本算盘大师一决高低时，有任何人注意到同一个数出现在费曼的书["别逗了，费曼博士"]中了吗？输掉简单算术后，所给问题是计算 1 729的立方根！费曼显然没听说过拉马努金的故事，因为他在书中只字未提. 他从战时做工程师的日子里记起来，一个立方英尺等于1 728立方英寸！因此，当那个日本人在算盘上大汗淋漓时，他却慢慢地吐出几个显然的数字 1，2，0，同时还异常兴奋地用幂级数去逼近其余数. 而且，该数在八进制①中的数 3 301 在很长一段时间里是 Xerox Parc 的中心计算机的密码. 或许这将会激发某些人进行更多的探究.[52]

【62】

① 用 8 代替十进制中的底数 10，故 $1\ 729=(3\times8^3)+(3\times8^2)+(0\times8)+1$. ——原注

接着是一位神经心理学家斯坦尼斯拉斯·德哈恩(Stanislas Dehaene)的评论：

> 费曼记住 1 728＝12×12×12 的故事特别有趣，因为它加强了这样一种思想，即 1 728 事实上是一个很容易认识的数，许多人——至少包括拉马努金，费曼，西蒙尼，我自己以及其他许多人——把它储存在头脑中的数表里. 但这丝毫也没有减少我对拉马努金的钦佩，这确实使他显得更人性化、更易于理解.[53]

因此，熟悉立方数的人会推理如下. 直接认识到 729 是个立方数(9^3). 还有，1 000 是 10^3，因此 1 729 为两个立方数的和，这已经是很有趣的了. 又，1 729 比另一立方数 1 728 多 1，故很容易看出 1 729＝12^3+1^3. 可以说，这个等式中真正的数学内容(因为其他靠的是死记立方数)乃是知道——像拉马努金那样——1 729是可以用两种不同方式来表示的两个立方数和的最小数. 这非常聪明.

对于拉马努金那样的人来说，整数的意想不到的复杂性——可用它们来玩游戏，可问与它们有关的问题，清晰一下子变成困难——是极有诱惑力的. 在某种程度上，对于许多数学家来说都是如此. 在许多情形下，它促使他们踏上数学之旅.

对非数学家来说，哈代-李特伍德的数学论文是难以理解的，但它们偶尔也让人领悟到兴奋之极点——因寻求一个数学问题的解法而产生的“真正的激动”. 李特伍德的一段以生动活泼、充满感情的语言写成的关于哈代和拉马努金的报道值得仔细一读，尽管它堆砌了许多含有很深专业含义的符号的公式和【63】方程. 报道的核心部分是高等数学内容，但它讨论的实际上是从最简单的数学方法即整数加法中产生的一个概念. 正如黎曼假设的一切复杂性产生于一个关于素数的简单问题，拉马努金对高等数学的贡献之一源于提出一个更加简单的任何小孩子都会

做的求"和"问题. 李特伍德对拉马努金怎样获得其顿悟的评论值得详细探讨.

首先我们需要一些专业术语. 拉马努金感兴趣的是所谓的"拆分". 这是数论中所描述的最简单的概念之一,但它引导拉马努金和哈代创造了一个对没有专业知识的人来讲十分复杂的公式. 但这种情形在数学上时有发生. 拿黎曼假设来说,使数学家对数论如此痴迷的原因之一是潜伏于一个平静的、有时十分显然的表面之下隐藏的深渊.

整数 N 的一个拆分是将其他整数加起来得到 N 的不同方式的种数. 例如,你可以用 3+3;2+4;5+1;1+2+3;1+1+1+1+1+1;1+1+1+1+2;1+1+1+3;1+1+4;2+2+2;2+2+1+1 或单独取 6 来得到结果 6. 因此,将较小的整数相加得到 6,共有 11 种不同的方式. 而得到 5 的方式只有 7 种——把 1,2,3,4 按不同的组合相加. 20 有 627 种不同方式. 相加得到 6 的每一个算式称为 6 的一个"拆分". 因为 6 的拆分有 11 个,所以数学家将其写成 $p(6)=11$. 类似地,$p(5)=7$,$p(20)=627$.

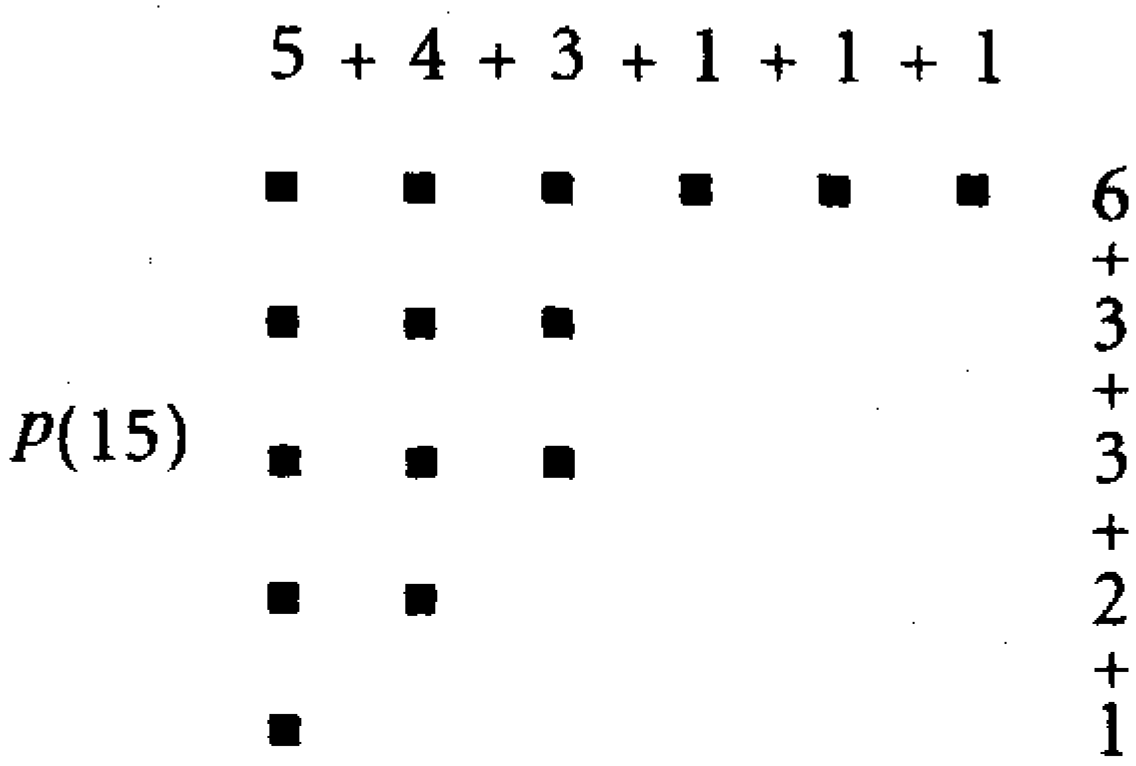


图 4 简单的运算如何导致复杂的数学. 一个数的拆分是将较小数相加得到该数的不同方式的种数. 这里是 15 的两个拆分,它们通过点阵彼此相关联.

【64】

关于数的拆分的一个有趣事实是,有些拆分成对出现,乍看起来,它们彼此无关,而仔细检查却是密切相关的. 15 的一个拆分是 6+3+3+2+1;另一个拆分是 5+4+3+1+1. 但如果你

用一列点写出第一个拆分(如图 4),那么你会看到,若竖着看而不是横着看的话,则得第二个拆分.你甚至可以对两者之间的关系作一推断.显然,一个拆分中的最大部分等于另一个拆分中的行数.

到目前为止,并没有什么太数学化的内容让人感到困惑,尽管看起来也没有太多的东西值得为之兴奋.下表给出了前三十个整数的拆分.当拉马努金需要知道一个具体的数 n 的 $p(n)$ 值时,他只要查看另一位剑桥人、昔日皇家炮兵团的少校麦克马宏(Major Percy MacMahon)编制的一张表即可.麦克马宏少校最喜欢的事就是计算整数相加的不同方式的种数,以求得诸如 $p(100)$ 这样的拆分数.幸运的是,有一种方法不需要算出并写下 190 569 292 个算式——这是一个正确的值——尽管它也很冗长.

当数学家面对这个拆分表中的一系列值时,他们马上想到的第一个问题便是:是否有一个生成这些数的公式.换言之,是否会有 $p(n)=n^2$ (显然不对).$p(n)=n$ 又如何呢?对于 $n=1$, 2,3,这看起来是成立的,但大于 3 时就不成立了.该公式确实也没有什么实际用处.

哈代和拉马努金向自己提出了这个问题,经过研究,他们获得了一个惊人准确的公式.如果你把任一整数代入他们的公式进行计算,结果都是 $p(n)$.当李特伍德评论拉马努金的论文集时,他单单挑出关于 $p(n)$ 的论文,作为拉马努金数学高质量的范例.论文说明,拉马努金在哈代帮助下所获得的【65】这个公式是如何精确计算 $p(100)$ 和 $p(200)$,得到正确值 190 569 292 和 3 972 999 029 388 的.李特伍德的评论中,字里行间流露出一种激动和钦佩,就像别人在倾听一位钢琴大师的演奏,或在画廊里看一幅杰作,或在观看一个技艺高超的运动员的完美表演时所流露出的激动和钦佩一样(着重点为作者所加).

$p(1)$	1
$p(2)$	2
$p(3)$	3
$p(4)$	5
$p(5)$	7
$p(6)$	11
$p(7)$	15
$p(8)$	22
$p(9)$	30
$p(10)$	42
$p(11)$	56
$p(12)$	77
$p(13)$	101
$p(14)$	135
$p(15)$	176
$p(16)$	231
$p(17)$	297
$p(18)$	385
$p(19)$	490
$p(20)$	627
$p(21)$	792
$p(22)$	1 002
$p(23)$	1 255
$p(24)$	1 575
$p(25)$	1 958
$p(26)$	2 436
$p(27)$	3 010
$p(28)$	3 718
$p(29)$	4 565
$p(30)$	5 604

无需告知读者，这是一个令人十分震惊的定理，他真的会相信，建立这个定理所用的方法用到了一个新的重要原理，而这个原理在其他领域也是卓有成效的．这个定理的故事是十分浪漫的．[李特伍德开始描述这个过程]真正的突破从这一点开始……但自始至终拉马努金总是坚持认为，正确的东西要比已经建立的多得多："必有带有误差 $O(1)$ 的公式．"这是他最重要的贡献；它既是完全必要的，又是最不寻常的．现在，作一严格的数值检验，即可得出关于 $p(100)$ 和 $p(200)$ 的令人震惊的事实．设 v 是 n 的一个函数；这是十分重要的一步，它用到了拉马努金自己显然未能发现的新的高深的函数论方法．于是，这个完备的定理便诞生了．但若没有拉马努金的另一个贡献，最后的困难或许就不可能解决，该贡献是一个完美的典型．仿佛其分析上的困难还不够，该定理扎根于一种纯形式化的几乎坚不可摧的防御线之后．函数 $\psi_q(n)$ 的形式是一个不可分割的整体；在许多近乎等价的形式中，有必要精确地选择一个正确的．除非一开始就做这件事，并且 $-\frac{1}{24}$（不提 d/dn）是天才之不同寻常之举，否则完备的结果决不会出现在画面中．事实上，真的有点神秘．但愿我们知道有一个带有误差 $O(1)$ 的公式，那么我们就会被迫逐渐得出 ψ_q 的正确形式．但为什么拉马努金这么肯定有一个公式呢？说他有理论上的洞察力，这种解释很难令人信服．很难看出什么样的数字之例能够暗示出这么强的结果……至少，似乎逃脱不了这样的结论：正确形式的发现只是一种顿悟．我们把该定理归功于两位天赋颇不相同的人的一场快乐的合作，在合作过程中，两人都作出了最佳、最具特色和最幸运的工

【66】

作. 拉马努金的天才确实值得获取这个机会.[54]

即使不理解这段话中的任一个数学术语,我们也至少可以分享李特伍德看到拉马努金工作时的激动. 但如果更仔细地去看李特伍德写的材料,我们可以看到一些我认为处于纯数学魅力之根源的别的东西. 记住哈代-拉马努金的插曲是如何开始的——试图寻找将整数相加得另一个数共有多少种不同的方式. 一个小学生能计算出当 $n=1,2,3,4,5$ 时的 $p(n)$ 值,直到他/她厌烦了或出了小错. 但这个公式提供了一般答案,而无需计算每一个数的相应值——这是哈代-拉马努金论文的主题——它非常复杂. 该公式如下:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{q=1}^{\nu}\sqrt{q}A_q(n)\psi_q(n),$$

其中 $A_q(n)=\Sigma\omega_{p,q}\exp(-2np\pi i/q)$,和是对 p 来求的,p 与 q 互素且小于 q,$\omega_{p,q}$是 1 的某个 $24q$ 次方根,ν 具有$\sqrt{n}$的阶数,且

$$\psi_q(n)=\frac{d}{dn}\left(\exp\left\{C\sqrt{n-\frac{1}{24}}\Big/q\right\}\right),C=\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

“无需告知读者,这是一个十分令人震惊的定理”,李特伍德写道. 对这样一个复杂的式子,同样令人惊讶的事是,若用 6 来代 n,则得答案 11(即 $p(6)$,如前所见). 它几乎像魔术——用许多高等数学的式子制成的符咒一般,把一个简单的整数变成了另外一个整数.

在这个异常庞大的公式中,很少有人们熟悉的东西. 除了两个平方根符号外,它是希腊字母的大杂烩——$\nu,\Sigma,\omega,\psi,\pi$——d/d$n$ 是微积分中的符号,字母 e 则表示数论中多次出现的一个独一无二的数. 但它更糟. 我们可以接受这些符号代表我们自己并不用的数和过程,因而无需知道它们. 但如果你更仔细地看,【67】你就会发现看起来毫无意义的式子. 例如,“1 的某个 $24q$ 次方根”是什么东西? 从字面上看,它指的是一个自乘 $24q$ 次等于 1

的数.但 1 的任何次方根当然就是 1,不是吗? 1 的平方根是 1,因为 $1\times1=1$. 1 的立方根是 $1(1\times1\times1=1)$.事实上,1 的 48 次方根也是 1,因为 $1^{48}=1$.

这个使非数学家发晕的可怕公式的另一个元素嵌在式子 $e^{2np\pi i/q}$ 中,用更易阅读的更大的字体写出,就是

$$e^{2np\pi i/q}.$$

字母 e 是个数学常数,类似于 π,它表示在数学的许多不同领域经常出现的一个固定的数,其数值约为 2.718.

式子中的字母 n 表示我们要求其 $p(n)$ 值的那个数.我们可以暂时把 p 撇在一边,因为它和 $p(n)$ 中的 p 并不是同一码事,它实在太让人迷惑了. π 是另一个固定的数,是圆周长与直径的比值;还有字母 i,如前所见,它具有表示 -1 平方根的异常有效的功能.

导出这个公式的步骤有据可依.从表面上看,该公式与关于简单拆分的初始问题"$p(n)$有什么规律?"相去甚远.但三个人在数论上完全游刃有余.当你阅读他们的著作时,他们给你的印象是不费吹灰之力的优越感,尤其是对我们中的那些看到任何比 $9\times7=63$ 更复杂的数学式子就会搔头皮甚至反感的人更甚.但即使是看起来很难的事情也不一定会如此.

我碰到过一个对我而言和黎曼假设本身一样难的问题,但它却是给学生们出的题目.哈代分析这道题时,证明了显然是对数、幂和误差之细微差别的直观理解的东西.在数学上常常令人吃惊的是,技巧在于知道何时以及怎样放弃寻求极端的精确性而去求近似值,花更少的力气获得答案.哈代论文集中所提出的【68】这个问题如下:

> 找出方程 $e^{e^x}=10^{10}x^{10}e^{10^{10}x^{10}}$ 的一个较大正根的近似值.

换言之,用什么数来代替 x 可以使左边等于右边?

哈代描述了解决该问题的方法."需要注意的关键之处是,

(i) 因子 $10^{10}x^{10}$ 无关紧要，(ii) 一开始就去求十分精确的根是徒劳的……孩子们遇到一个数值问题时的最大弱点是，他们看不到精确值在何处是必需的，何处是完全无用的". 顺便提一下，问题的答案是，x 介于 63 和 67 之间，哈代说，"稍微费点力就可以找到一个更接近的值".[55]

哈代-拉马努金-李特伍德的合作是新近数学史上的一段佳话. 20 世纪初的几年里，三个数学天才一起得出一个又一个定理，一个又一个函数，而所有这一切都只是为了纯粹的愉悦和兴奋. 拉马努金在印度独立做出来的数学以及他与哈代合作得到的新结果，在拉马努金于 1920 年 33 岁英年早逝很久以后，为数学家们提供了思想养料. 对哈代和李特伍德来说，在拉马努金去世后的岁月里，黎曼假设往往退居幕后，只是偶尔来到台前.

匈牙利天才数学家波利亚是哈代的朋友，他描述了他的朋友对于黎曼假设的热情，这从哈代对他的丹麦同行波尔的定期拜访中可见一斑.（从中可知哈代是一位坚定的无神论者.）

> 他们有一个固定的习惯. 他们先是坐下来谈话，然后去散步. 他们坐下来时，会作一下安排并写一个日程表. 日程表上的第一点总是一样的："证明黎曼假设"……在丹麦，哈代与波尔住在一起直到暑假结束，当哈代不得不回国讲课时，只有一艘很小的船可乘. 北海有时波涛汹涌，这样一艘小船沉没的可能性不会是 0. 尽管如此，哈代却仍然去乘这艘小船，并给波尔寄去一张明信片："我证明了黎曼假设，G·H·哈代". 如果小船沉没，哈代溺水身亡，那么人人皆相信他证明了黎曼假设. 但上帝不会让哈代享有如此巨大的荣耀，因此他是不会让这艘小船沉没的.[56]

【69】

尽管他们的成就不断增加，但哈代和李特伍德证明黎曼假设的所有尝试都以失败告终，只能把接力棒交给新一代数学家了.

【70】

5. 很　可　能

ζ 函数的零点在哪里？

黎曼的猜测真稀奇.

他说，它们都在一条临界线上，

它们的密度为 $2\pi \log t$ 加 1.

——托姆·阿波斯托尔(Tom Apostol)

黎曼假设在从事该领域研究的数学家中激起了特殊的热情. 这是一种一旦他们掌握了数论就会油然而生的热情. 亨利克·艾瓦尼克是一位美籍波兰数学家，现在新泽西州罗格斯大学工作. 他个子不高，为人热情，口若悬河，口音很重. 我第一次见到他时，他向我解释说，我可能不会觉得他有趣，因为他“并无什么特色”. 但像许多热情者一样，一谈到他所喜爱的主题时，就一发而不可收，甚至偶尔会眉飞色舞. 他一生研究素数. 1997年，他和多伦多大学的约翰·弗雷德兰德(John Friedlander)设计了一个数学证明，使别的数学家大为惊讶. 他们使用的是所谓的“筛法”，该方法把整数分成两组，其中一组包含绝大多数的素数，而另一组包含少数甚至不含素数.

为了具体了解这个方法，想像平方数的十分简单的筛. 若保留以 1，4，5，6 和 9 结尾的整数而去掉其他数，这就是一个平方数筛. 在这个过程之后，可以知道两件事：一是，去掉的数中没有平方数；二是，平方数在剩余的数中所占比例比在所有整数中的

比例高. 从这个意义上说，你的“筛”筛去了非平方数，而把平方数集中在剩余的数中. 所有这一切都是基于这样一个事实：平方数必以 1，4，5，6 和 9 中的一个数结尾(尽管由这些数中的某一个结尾的数也可能不是平方数).

【71】

艾瓦尼克和弗雷德兰德使用了形如 a^2+b^4 的素数筛，证明在这种形式的数中存在无限多个素数. 例如，1^2+2^4 等于 17，为一素数，而 2^2+3^4 等于 85，不是素数. 这是个极大的进步，因为在 1 万亿(1 000 000 000 000)之内，能写成形如 a^2+b^4 的数不足 10 亿(1 000 000 000)，这就意味着通过这个方法，你可以“筛出”含有素数比例比以前更高的一组数.

艾瓦尼克与黎曼假设之间关系的故事始于他的早年. “我在波兰，由于参加数学奥林匹克[中学生的国际数学竞赛]的缘故，我很早就接触到了数学. 我不是说学校里有极好的数学课程，而是说我很早就参加数学竞赛了，同时自学了很多数学，而不是在学校里学到的. 我有个很爱写信的朋友. 我赶不上他，因为他每周要写十封信，而我只能回他一封. 有一次他问我：“亨利克，你知道什么是黎曼 ζ 函数吗?”我回答说：“抱歉，我一无所知.”他又说：“但我听说它很棒，与素数有关，是个伟大的猜想，你能找一些相关资料吗? 或者在哪里可以找到呢? 到底讲什么?”于是我去找老师，向他请教什么是黎曼 ζ 函数. 第二天，老师把我叫去，向我解释了一切，说：“这就是黎曼 ζ 函数.”我听懂了，但他所说的实际上是魏尔斯特拉斯 ζ 函数，而不是黎曼 ζ 函数. 就在那时，我的朋友写信给我，寄来了一份黎曼的论文，所以我的确早早就接触到了这个问题. 那时我读高三，仅 18 岁.

那时，艾瓦尼克最喜欢的课题是复分析，这是关于包含形如 $a+ib$ 这种数的数系的数学，其中 i 是 −1 的平方根. 早期对数学的热情使他相信，念大学时，他将会证明另一个重要定理.

“科学院有个著名的教授，他在那里开了个讨论班，他研究的是数论. 一天，出于我对素数的兴趣，我觉得自己证明了算术

【72】级数中的素数情形下的狄利克雷定理，于是我对系里的一位教授说了这事.”这位教授又将其告诉了另一位老师施尼策尔(Schnitzel)教授，并安排艾瓦尼克去见他.“第二天，我很难为情，因为我发现我的计算中有个错误”，我说：“不，我不来了，无论如何都不来了.”但他却说：“不，请务必要来.”于是我去了.施尼策尔教授圆通老练，他对我以前做过的研究只字不问，只是给了我一篇论文，让我在讨论班上报告.我很激动，这可是波兰科学院数学研究所，而我只是个大学一年级学生.这位名教授够照顾我的面子的，他对我几天前说过的话未作任何评论.他给我的是邦比艾里(Enrico Bombieri)关于素数定理的初等证明的论文，十分高深.真是苦不堪言.我夜以继日地读了整整两星期，才去报告.我非常喜爱这个课题，即使在今天，我仍因为素数的缘故从事黎曼假设的研究.

邦比艾里现在普林斯顿高等研究院工作.在我去拜访他之前，有人警告说，我必须和他坐得很近，竖起耳朵听，因为他说话既轻又慢.和艾瓦尼克以及在该领域的许多顶尖数学家一样，邦比艾里很早就被素数和黎曼假设所吸引.

“八九岁时，”他平静地告诉我说，“我读到一些几何和代数书以及一本关于数学问题的书.由于数论无需多少基础性的材料，所以它吸引了我的注意.家父也对数学很感兴趣.他是个银行家.或许他想成为一名数学家，所以不时买数学书看.约 12 岁时，我成了他的助手，慢慢地，这些书成了我个人图书馆中的一部分，我问父亲：‘你能帮我找到这本书吗？’于是他就会去帮我找.

“接着，我开始思考问题，甚至开始做研究.家父认为，对我所做的研究，最好征求一下专家的看法.最终，我写了一篇小稿子，由米兰大学教授、当时顶尖的意大利数论专家吉尔法尼·里奇(Giovanni Ricci)审阅.他读了我的稿子——他不知道这是一【73】个十几岁孩子写的，我当时 15 岁——读完后问：‘这家伙是谁？

我想让他做我的助手.'之后他才知道我还在念高中,无法做他的助手.不过我还是去拜见了他,于是他便开始教我.

"我很早就知道了黎曼假设,它确实是了解素数更精确分布的关键所在.我对素数和解析数论很感兴趣,所以自然会遇到黎曼假设.到了18岁时,我无书不读,渐渐地,对这些事情产生了兴趣."

如今,邦比艾里成了黎曼假设领域里公认的领袖人物之一.

除非你与一位向你要代数书作圣诞礼物的8岁孩子有过亲密接触,否则你很难了解孩子的内心,看出到底是什么导致他喜欢数学胜过其他活动.当我与一个又一个数学家谈起他们的少年时代时,故事层出不穷.即使一个没有经验的人掌握数论基本概念和一些基本问题不是太难,少年时代的兴趣如何成为终身事业,这仍然是非同寻常的.

芬兰数学家马提·朱蒂拉就是另一个例子.当我和他在图尔库(Turku)大学他的办公室里交谈时,他突然把身体往后靠,从书架上取出一本轻便狭长略微破旧的书,然后开始念:

"'*Niiden alkulukujen lukumäärää, jotla ovat*$\leqslant n$...'我对数论的兴趣始于这本书.这是芬兰的数论和代数课本,是大学教材.我16岁时买来这本书,是在春天买的;整个夏天,我在没有任何人指导的情况下,自己读完了整本书.那时,我只有一些数论的基础知识,但上大学时,在没有听课的情况下,我成功地通过了基于此书的考试."

他指向两行脚注,对一位不讲芬兰语的数学家来说,唯一认得出来的是高斯估计小于任一数 n 的素数个数的公式.

"这两行脚注决定了我的课题选择,正是在此时此地,因为这两行脚注,我决定以此为我的研究领域.这个决定的背后是对于素数的痴迷……黎曼假设是一个基本的问题,这是个一流的问题.与诸如费马大定理相比,我总觉得黎曼假设真的重要.一个有趣的问题如果得到解决或证明,会导出什么东西来,谁知道呢?从理论上讲,【74】

这个假设当然有可能是错的.但大多数人相信它是对的。”

事实上,大多数人对该问题不置可否.即使你是一位对此颇有造诣的非数学专业人士,你对黎曼假设仍然知之甚少.你知道有个数学公式,能够粗略预测出小于任一数的素数个数,如果你把该数代入公式的话.你也知道高斯的这个猜测不完全精确,它产生的误差正是德国数学家黎曼所设计的另一个数学公式的主题.有了高斯的估计(1896 年被另两位数学家所证明)以及黎曼的修正(只是一个猜想,尚未被任何人证明),我们对于素数的分布便有了更多的了解.

但还有一个成分,到目前为止我一直在掩饰着它.位于黎曼修正因子的核心,且对理解它与素数如何相关必不可少的是黎曼 ζ 函数,特别是称为黎曼零点——即本章开头所引托姆·阿波斯托尔诗句中的“ζ 函数的零点”的一系列数.

加州理工学院位于洛杉矶卫星城市帕沙迪那(Pasadena),占地数亩.当加州理工学院试图通过购买周边的土地来扩大他们美丽的新古典派风格的校园时,该市的长者们允许他们这样做,条件是不能拆掉数条市郊街道两边的许多大房子.结果,要在办公室找到托姆·阿波斯托尔就意味着得漫步在一条宽阔的林阴大道上,越过给草坪喷水的洒水车,穿过修剪整齐的草地,方能看到置于坚固的前门边上的不起眼的指示牌.

阿波斯托尔住在一间名为“突出数学(Project Mathematics)”的屋子里.我在楼上一个曾为卧室的房间里找到了他,当时他正专心致志地盯着一屏幕的希腊文.从 π 开始,数学广泛使用了希腊字母.但阿波斯托尔所看的并非数学.那是几周后他要【75】用希腊文进行演讲的稿子.阿波斯托尔的父母都是希腊人,后来到美国.小时候他说的是希腊语,但从未正式学过读和写.现在,他就要回他的祖籍地,此次他决定冒险用希腊文作一次演讲.

阿波斯托尔原名叫阿波斯托罗普洛斯(Apostolopoulos),七十多岁了,高高的个头,花白的头发,满是皱纹的脸庞.尽管他可能永

远证不出黎曼假设了，但他却已经培养了三代数学家，其中任何一位都有可能证明这个假设. 数学家可以分成两类，对于一个成功的证明，两者都是必需的：探索者预先计划出可能的研究领域，而挖掘者则埋头做着最终找到证明所必需的辛苦工作. 还有第三类，也是成功所必需的——向导，他们首先帮助探索者和挖掘者去理解问题，理解问题为何重要、为何有趣，从而激励他们去攻克难题. 在我所遇到的那些研究黎曼假设或黎曼 ζ 函数的数学家中，许多都有师承关系. 不止一人师从布里安·康雷(Brian Conrey)，而康雷师从查尔斯·梁维克，梁维克又师从托姆·阿波斯托尔.

阿波斯托尔似乎有培养挖掘者和探索者的窍门. 他告诉我一则评论，说明了他能给人留下的印象.

"我的一个学生在我的一次微积分课之后来找我，'阿波斯托尔博士，'他说，'这些东西对你来说似乎特别有意义，你对这些材料似乎如此得心应手.'"

尽管他觉得自己并没有什么专业知识或干劲来证明黎曼假设，然而他却不断回到该假设之中，犹如舌尖回到牙洞中一样. 第一次遇见阿波斯托尔是在发现一首诗的时候，该诗开头写道："ζ 函数的零点在哪里？/黎曼的猜想真稀奇"，于是我跟踪采访了他. 对于写于 1955 年的"趣味游戏"(jeux d'esprit)而言，"诗"或许是个太崇高的字眼，它有时会为了放入兰道、波尔、克莱姆(Cramér)，李特伍德和堤池马什(Titchmarsh)的名字而将一些多余的音节挤入一行，从而破坏了韵律. 但也有一些贴切的对句，诸如"Related to this is another egnima/Concerning the Lindelöf function $\mu(\sigma)$"(最后这个符号读作"mew of sigma"). 但这些诗句，原来是数论家会议的饭后即兴之作，在某种程度上，靠了非正式的数学杂志而得以保存下来. 有时，人们还加入一些新的诗句，使得故事延续至今. 【76】

阿波斯托尔从事数学研究已有 50 年. 起初他想当一名化学工程师，但和其他许多人一样，当他解出教授布置给他的未解决

问题之后，就开始迷上了纯数学. 了解到他做出了别人尚未做出过的发现——尽管是个小发现——足以让他改变职业道路，由化学工程转向数学. 他所解决的问题属于幻方领域，该领域对于那些喜欢趣味数学的人来说只是个有趣的谜题. 但正如数论上经常发生的那样，即使是最简单的问题也会导致复杂的数学. 在 5×5 的方格里写下 1 至 25，使得每一列、每一行、对角线加起来为同一个数，这是谁都可以通过反复尝试来解决的问题. 但若增加方格数，反复尝试就费时了. 无论如何，数学家更感兴趣的是找出如何在格栅内填数的法则，不论格栅有多大. 正是因为寻求这种法则，才使得阿波斯托尔觉得自己需要成为数学家.

和所有纯数学家一样，他熟悉黎曼假设，但他从未把自己当成一位严肃的竞争者.

“我不知道如何接近它，”他说，“我阅读了所有的资料，意识到这是个很难的问题. 我们中的一些人过去常常说起它，我记得曾经有人说过，‘我一天晚上做了个梦——我取了 s 的 ζ 的 ζ.’ 哦，我从未试图推进它.”

显然，当数学家们开始对一个特殊的数学函数梦寐以求时，这个函数便占据了他们的生命，对于黎曼 ζ 函数，就其双重意义而言，其迷人之处部分在于它的复杂性. 它很难理解，因为在更简单的欧拉 ζ 函数使用实数的地方，它使用了复数.

两种 ζ 函数均用式子 $\zeta(s)$ 来描述，但在黎曼 ζ 函数中，s 是个复数，即形如 $a+bi$ 的数，其中 i 表示 -1 的平方根. 字母 z 在数学式子中常常表示复数，而 x 和 y 一般用来表示实数. 所以，黎曼 ζ 函数是以下级数之和：

【77】

$$1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\frac{1}{5^z}+\cdots,$$

也就是

$$1+\frac{1}{2^{a+bi}}+\frac{1}{3^{a+bi}}+\frac{1}{4^{a+bi}}+\frac{1}{5^{a+bi}}+\cdots.$$

这个分数级数的和可以根据 z 的不同取值(或即 a 和 b 的不同取值)而取到各种各样的值. 但是研究黎曼假设的整个探索者和挖掘者大军都只对黎曼 ζ 函数的和的一个值感兴趣. 他们只对级数所有项加起来等于零时的函数感兴趣.(要记住,因为所有项均取正号,它的值是递增的,不会等于 0. 如果有些项是负的,例如,如果 $1/n^{a+bi}$有时为负,那么它们就有可能相互抵消,从而级数的和为 0.)

这里有个大胆的假设,不完全熟悉复变函数的人(包括我)都会认为它成立. 非数学家难以理解表达式 $1/n^{a+bi}$会有什么数值上的意义. 举一个具体的例子,如 $1/7^{3+12i}$,你如何求出 7 的$3+12i$ 次幂呢? 我们也许可以前进一步,如果记得 7^{3+12i}等于$7^3\times7^{12i}$,但在这一点上,如果真的想弄懂数学家如何求一个数的虚数次幂,然后将其分成一个个单位,那么我们就需要放下这本书,离开这座房子,去复分析和数论班学习几个月,在 1 到 2 年后再捡起这本书.

但如果你宁愿继续读下去——如我所希望的那样——那么你必须相信,当某些形如 $a+bi$ 的复数代入黎曼 ζ 函数中的 s,函数值将等于 0. 表达式的第一部分 a 称为实部,第二部分 b 称为虚部,下面是前面几个这样的数:

$$\frac{1}{2}+14.135i,\frac{1}{2}+21.022i,\frac{1}{2}+25.011i,$$

$$\frac{1}{2}+30.425i,\frac{1}{2}+32.935i,\frac{1}{2}+37.586i.$$

这些都是图 5 所示黎曼 ζ 函数的简化了的图像与 x 轴的交点. 决定这些零点在何处的法则与素数分布规律一样神秘. 零点和素数这两组数不可分割地联系在一起,联系的方式只有在有人证明了黎曼假设后我们才能够理解. 【78】

对于黎曼零点,有些事实我们怀疑而未能证明,另一些事实已经得到了证明. 前面几个零点的实部肯定都是$\frac{1}{2}$,我们怀疑是否所有的黎曼零点都具有同样的形式$\frac{1}{2}+it$,其中 t 是某个实

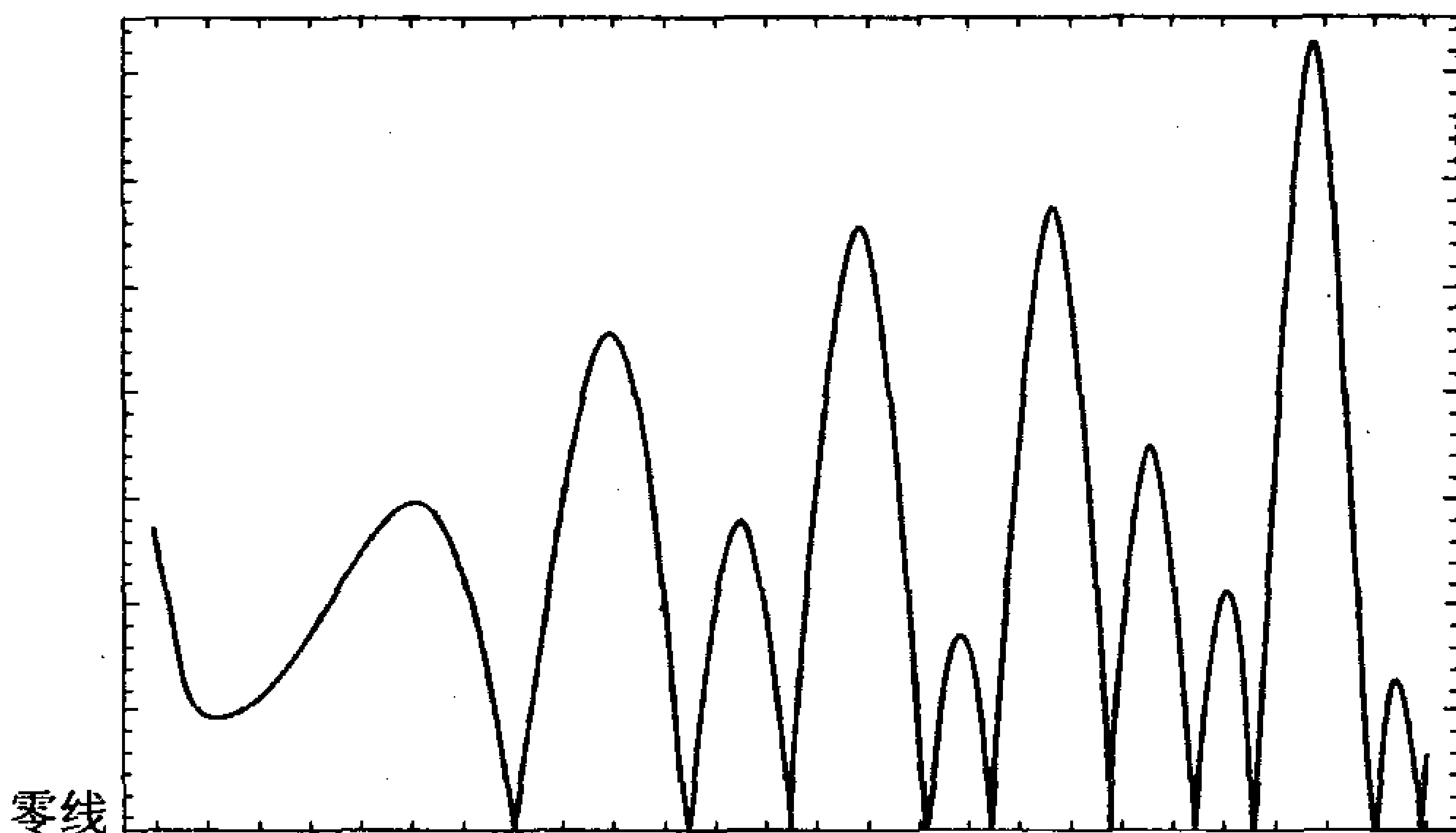


图 5 在黎曼 ζ 函数的简化图像中,曲线下降为 0 的那些点代表黎曼博士的零点.

数——但我们无法证明.我们能证明的——事实上黎曼本人已经作出证明——是所有零点的实部都位于 0 和 1 之间.

对于查尔斯·梁维克来说,黎曼 ζ 函数就像把一首微妙的英文诗译成其他文字一样难.他写道:

> 我想起了希莱尔·贝洛克①的双关语
> 如果我死了,希望人们这么说:
> 他的罪孽深重,但他的著作在传播
>
> 我不知道不懂英语的法国读者能理解多少……函数 ζ(*s*)意义深刻,直译起来几乎失去了所有的含义:"自然数的复数 *s* 次幂的倒数和."[57]

【79】

一些数学家像对待其他数学函数一样,将黎曼 ζ 函数想像为一种数学的"对象".他们理解该函数是如此深刻,以至于在他们的头脑中,它具有一种形状或一种结构,但这种结构并非真有具体的形状——它既没有顶,也没有底,既没有颜色,也没有质地,

① 贝洛克(Hilaire Belloc,1870—1953),英国诗人,散文作家和历史学家,著有诗集多卷、《英国史》四卷及传记等.——译者注

也没有重量.然而,它有彼此相关的各部分,可以从一种“形状”变换成另一种“形状”,可以用数学工具对它进行探索,揭示出其迄今为止尚不为人知的“内部”排列.所有这些表象组合在一起,形成了一个数学函数的主要结构特征——它的稳定性和持久性.

作为试图更好地理解黎曼 ζ 函数的非数学家,我们必须将其外部化,设法从数学家的头脑中把它找出来.我们已经用很简单的方式这样做了,试图将函数的波动表示成一条曲线,它反复从 x 轴开始上升又返回到零线.但这远远没有获得函数的真正性态,需要通过更复杂的三维图像来更近似地表征它(关于数学图像的更多知识,参阅配套知识 5).

总结一下:对于函数(或“黑箱”)$\zeta(s)$,如果在一端代入 s 的值,另一端就得到一个函数值 $\zeta(s)$.对于使用实数的常规函数的图像,数学家们描出 x 和 y,看函数如何将 x 的一系列递增的值转变为形状——一条斜线,一个椭圆,一条抛物线.但这里由于 s 是个复数,我们就不能用同样的方法,而必须找到能提供 ζ 函数有效的直观表示的类似方法.

【80】

由于 s 为复数,我们可将其表示成 $x+\mathrm{i}y$ 的形式,因此图 6 中 s 是水平平面上具有两个坐标的点.如果我们用街道来类比,s 是一个点,地址为 y,沿加米诺大道距原点 x 个单位.现在,对于 s 的每一个值,如果我们利用 ζ 函数来对其进行“加工”,结果会如何呢?我们需要一种用图形来说明的方法.尽管函数值 z 也是个复数,但有一种方法可以将它表示成一个简单的数——水平平面上方的“高”.因此,对于每个点 s,都有相应的点 z——它等于 $\zeta(s)$——位于三维空间中的某处.若取一系列点 $s_1, s_2, s_3, s_4, \cdots$,算出相应的 $z_1, z_2, z_3, z_4, \cdots$,我们将看到,一个三维图形的轮廓出现了,如图 6 所示.

因此,现在找到了一种将复数之间关系表示成三维空间上一个曲面的方法.如果我们只是作出黎曼 ζ 函数的部分图像,那么所得到的曲面,其形状将告诉我们许多信息.图 7 显示的是黎

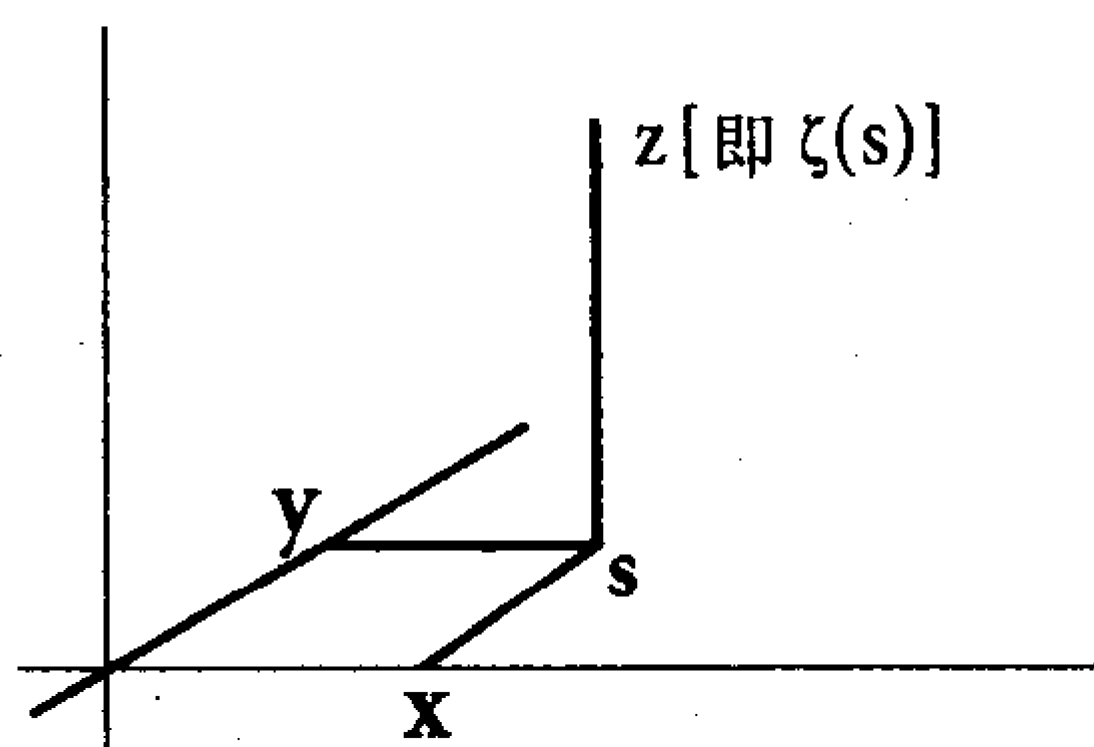


图 6 我们可以将黎曼 ζ 函数想像成一条三维曲线，对于平面上具有坐标 x 和 y 的点 s，计算出平面上方某个高度代表 $\zeta(s)$ 的点 z. 对于 xy 平面上的每一个点，作出相应的点，于是我们就作出一个三维曲面.

曼 ζ 函数最有趣的区域附近的一块空间，其中 x 介于 -6 和 8 之间，y 介于 -26 和 $+26$ 之间. 在这类图像中，ζ 函数在 $s=x+\mathrm{i}y$ 处的值为海平面上方表面的高度.

图 7 中间的"山峰"可以无限向上延伸. 它是 $s=1$ 时 $\zeta(s)$ 的值. 观察级数

$$\sum\frac{1}{n^1}=1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{4^1}+\cdots$$

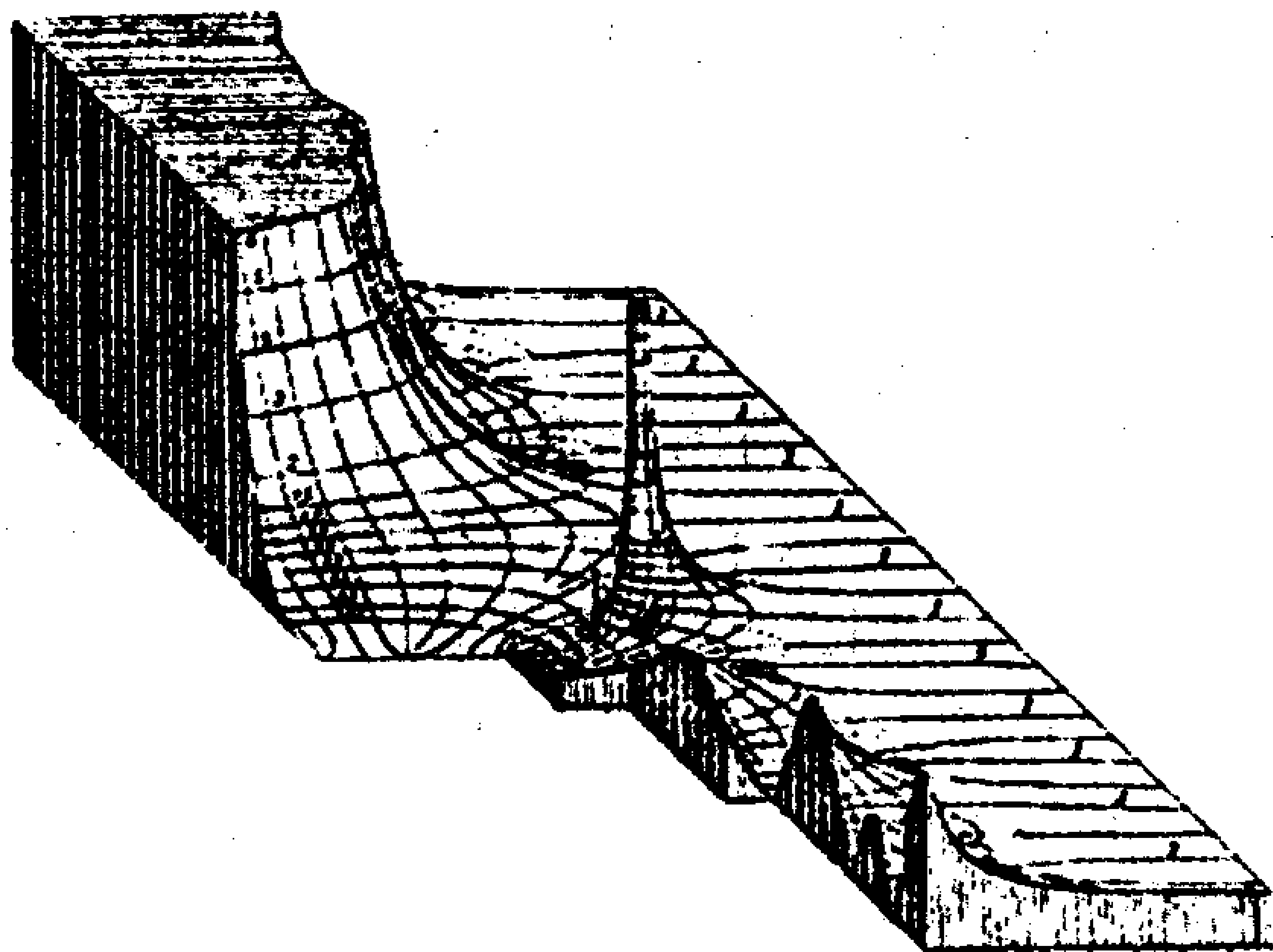


图 7 黎曼 ζ 函数三维图像的一部分. 图中所示的临界线切开三个最近的"山峰". 中间那个高峰实际上向上升至无穷. 因为 $s=1$ 时，$\zeta(s)$ 等于无穷大.

【81】

即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$. 这个著名级数叫调和级数，你可以通过加更多项，使它变得越来越大，尽管所加项越来越小. 所以无穷多项相加，结果是个无穷大的值 $\zeta(1)$. 表面向上升至无穷大的点被称为极点.

但是零点落在哪里呢? 作为那些使 $\zeta(s)$ 等于 0 的 s 值，它们位于海平面高度的地方. 图 7 中的那块带有最近"山峰"的土地沿一直线切开，可以看出，在三点处山谷降至海平面高度. 这三个点，即最前面的三个零点，位于同一条直线上. 该直线距水平面上零轴半个单位. 所以该直线上每一点都具有 $\frac{1}{2}+\mathrm{i}y$ 的形式. 这片土地伸向远方，其上有更多的零点. 目前已经算出来的零点都位于这条直线上，因此我们称之为临界线(critical line)，但迄今尚未有人证明这一点. 数学家所得到的最佳结果是证明了黎曼零点必位于一条狭带上，该狭带位于临界线两侧 $\frac{1}{2}$ 单位的范围内，称为临界带.

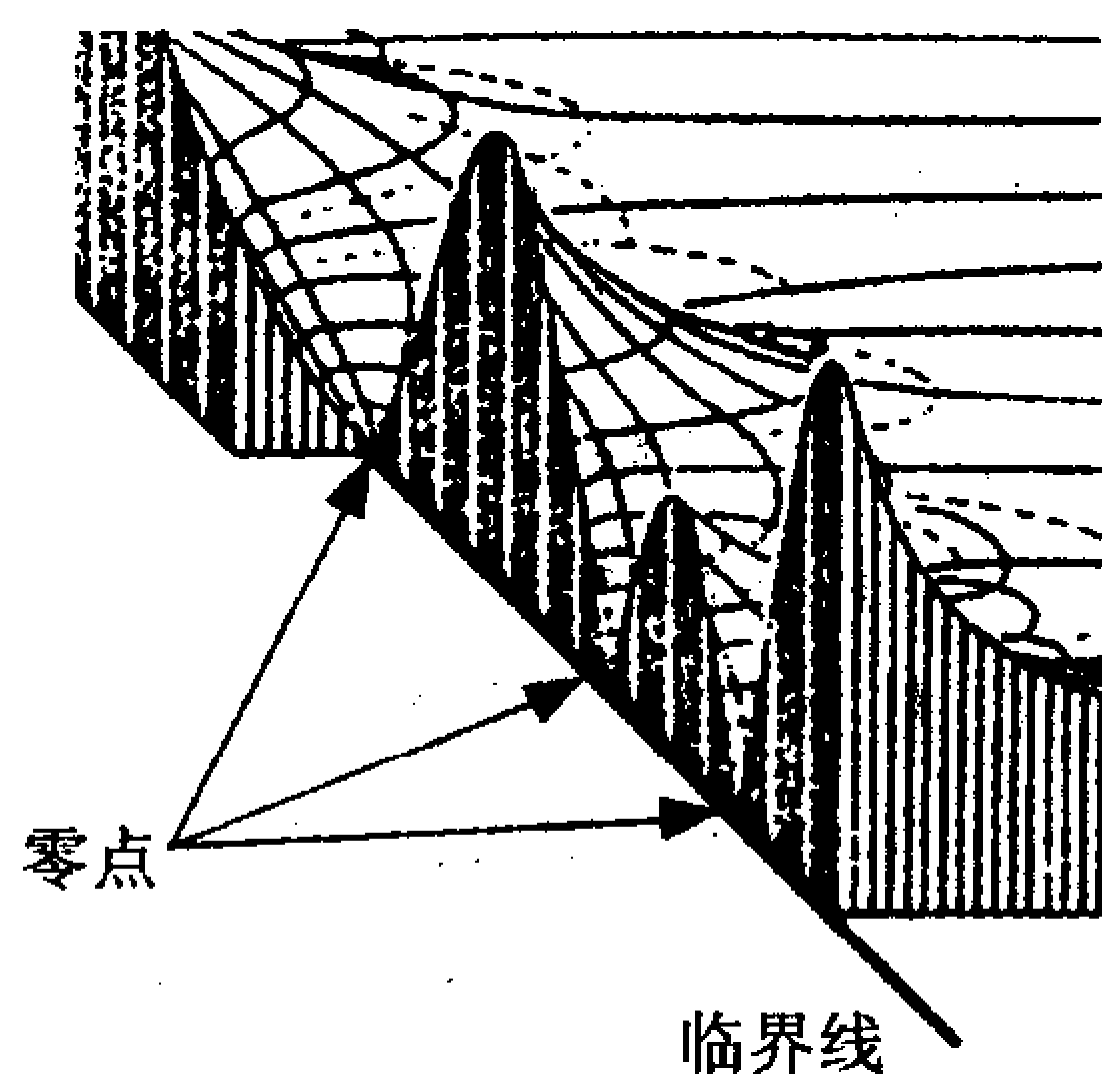


图 8 近看图 7 所示黎曼 ζ 函数表面上三座最近的"山峰". 显示了最前面的三个黎曼零点.

【82】

图 9 显示了黎曼 ζ 函数的一个零点的近距离图像. 从上方看，图中的斜面越接近"海平面"就越暗. 位于最暗部分中间的一个点即为黎曼零点，在该点 s，黎曼 ζ 函数值等于零. 黎曼 ζ 曲面

的这个特殊部分显示了最小黎曼零点周围的区域.

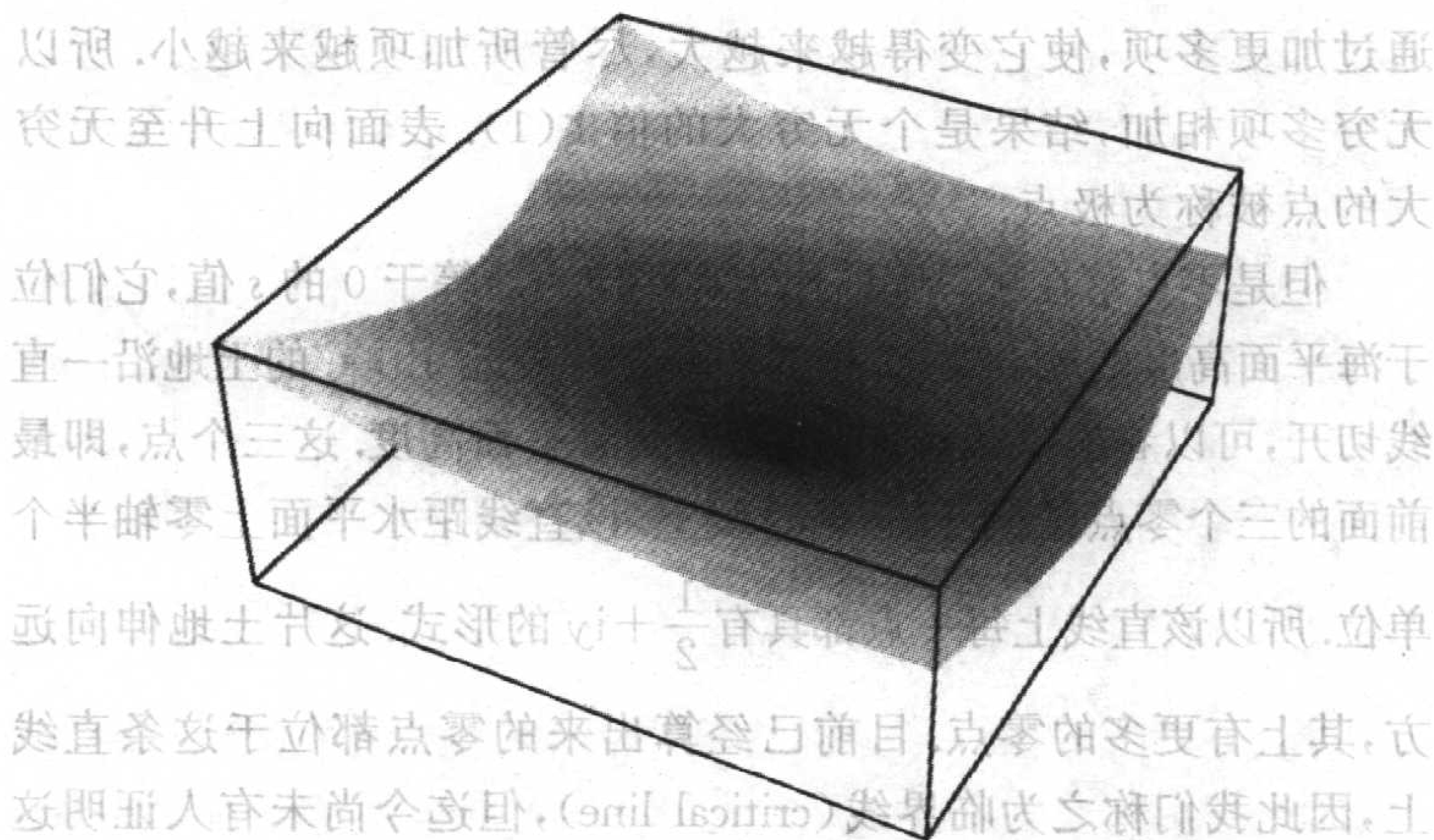


图 9 从上方斜着看,第一个黎曼零点乃是黎曼 ζ 函数的三维表面与水平的 $x-y$ 平面(盒子的底面)的切点. 该点位于表面上最暗处的中心.

由于计算机的广泛应用,你可以计算出任意多个黎曼零点,但从黎曼时代直到 20 世纪 60 年代,这些计算都是通过手工或机械计算机来完成的,这是一个艰难的过程. 在黎曼去世后的 60 年间,人们相信黎曼本人根本没有算出任何零点,而是将他的假设建立在推理和直觉的基础之上. 米歇尔 · 贝利(Michael Berry)与一个最有希望的证明方法密切相关. 他是布里斯托尔大学的一位和蔼可亲的数学物理学家,他对自己的爵士头衔满不在乎,他告诉我,他是如何发现黎曼实际上算出过一些零点的事实的.

【83】

那是个很浪漫的故事,黎曼是个写字凌乱的工作者,他死时留下了大量的潦潦草草的手稿. 50 年后,才有一个十分杰出的数学家卡尔 · 路德维希 · 西格尔(Carl Ludwig Siegel)更仔细地读了他的论文,他发现

黎曼草草写成的一些公式难以理解，满是诸如计算 2 的平方根到 38 位这样的怪事情. 他对此作了研究，意识到原来黎曼手头已经有了计算黎曼零点的方法. 这是很漂亮的数学内容，如果西格尔没有发现，我们很可能至今还不知道这个事实. 西格尔发现了这一切，把它写成得体的形式，今称黎曼-西格尔公式. 几乎所有人都用它来计算比较大的零点值. 真神奇.

解析数论中的计算很少是直截了当的. 它们常常需要将包含复数的简短表达式表示成实数无穷级数的和的组合，从而易于操作. 但是，一旦可以用黎曼-西格尔这个可操作的公式来计算 ζ 函数的零点，则在接下来的 30 年中，已知的黎曼 ζ 函数的零点个数就从半打左右增至好几打. 1935 年，牛津大学数学家堤池马什(E. C. Titchmarsh)运用穿孔卡(punched-card)计算器求得前 104 个零点. 接着，利用更复杂的设备，得到了数百、很快又得到数千个零点. 每个零点都具有 $\frac{1}{2}+bi$ 的形式. 【84】

如果我们将复数简单地表示为街道格栅上的地址，那么这意味着，迄今发现的黎曼 ζ 函数的所有零点位于同一条街上，它在与加米诺大道垂直，始于十分接近实数之起点的点，即点 $\frac{1}{2}$，如图 10 所示. 现在，黎曼说(但没有任何证明)的是能够计算出的所有零点都位于同一条"街道"上，街名为 $\frac{1}{2}$，它从点 $a=\frac{1}{2}$ 出发，从实数轴延伸出去. 当我们更深入地了解该主题时，该直线更为重要，它就是临界线.

事实上，他并未特别说起这一点，正如亚历山大·伊维克(Alexander Ivic)向我指出的那样. "黎曼在 1859 年确实说过'*sehr warscheinlich*'——意思是'很可能'——'所有的零点都位于一条临界线上'. 现在，他是个先驱者，一个有眼光的人. 他的眼光和

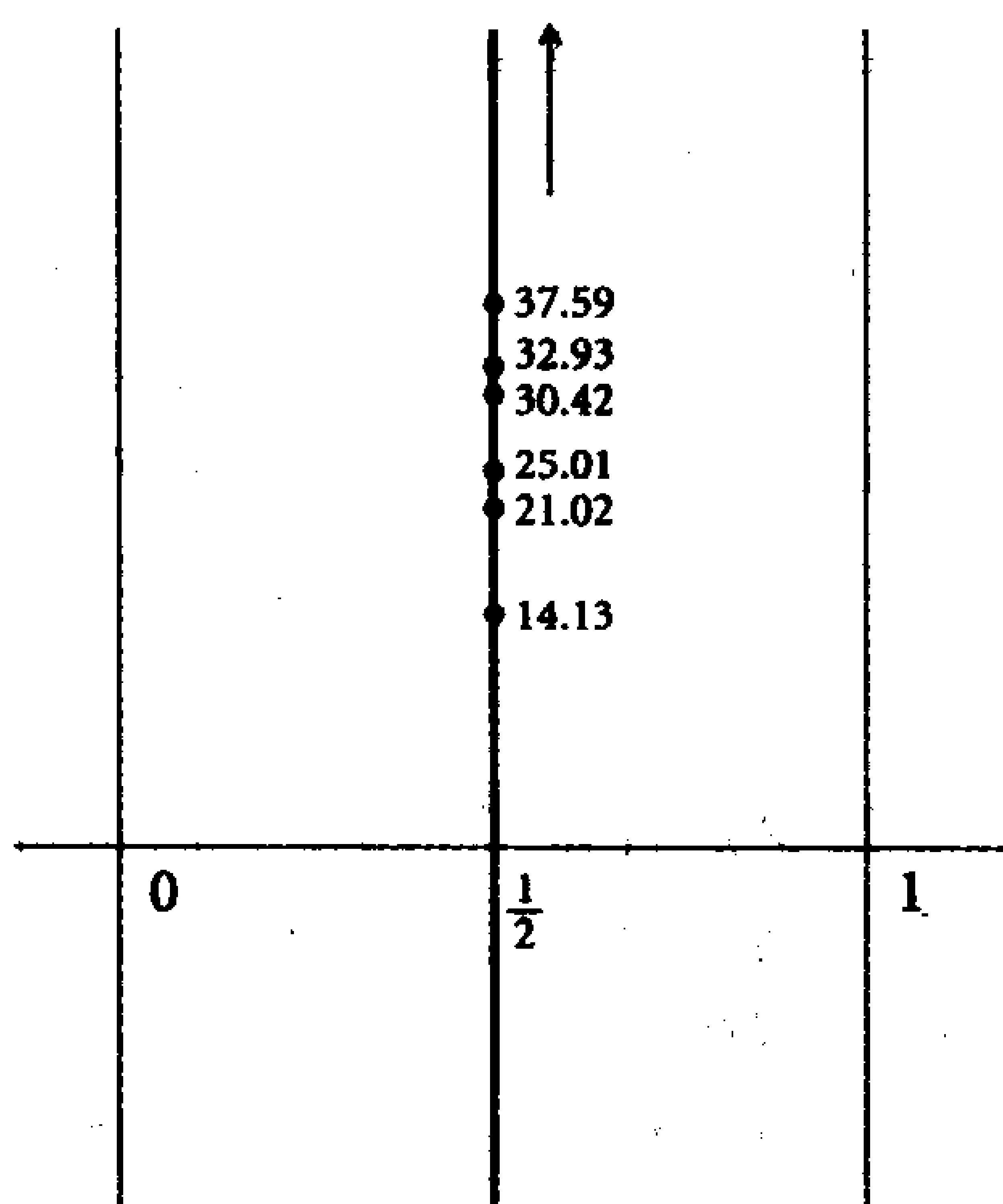


图 10 计算出来的前几个黎曼零点均具有$\frac{1}{2}+ib$的形式，第一个零点的 b 值为 14.13. 可以证明，所有的零点均位于临界带上，但迄今尚未发现不在临界带中间的临界线上的点.

结果超前于同代人数十年，但请注意，他很谨慎——他说的是'很可能'——他并没有说'我拿生命担保这是正确的'."

现在，有了一些基本知识，我们就可以理解一点托姆・阿波斯托尔的诗句了. 阿波斯托尔告诉我他为何写这首诗，他是受到另外某个人所提供的第一行的触动.

"一次，有人对我说，'嗨，你听说过关于 ζ 函数的诗歌吗?'我回答说，'不知道，什么样的?'他说，'第一行是，s 的 ζ 的零点在哪里?''是吗?''是这样. 这是我所知道的一切.'这激起了我的兴趣，我说，'如何根据这一行做出一首诗? ——ζ 函数的零点在哪里? 黎曼的猜测真稀奇.'我们将在加州理工学院举行数论会议，我决定写点东西在将要举行的宴会上表演. 我写了若干行，使用了取自'Sweet Betsy from Pike'的音乐. 竟一炮打响."

以下摘录的是更易理解的几行：

ζ 函数的零点在哪里？
黎曼的猜测真稀奇，
他说，它们都在一条临界线上，
它们的密度为 $2\pi \log t$ 加 1.

【85】

一石激起了千层涟漪，
许多出色的人，带着旺盛精力，
孜孜以求，用数学的严密，
寻找 t 增大时 ζ 的变化趋势.

兰道、波尔和克莱姆不等闲，
哈代、李特伍德和堤池马什有实力，
他们付出了努力施展了才智，
可是无人成功找到零点的位置.

1914 年哈代作出了新发现，
无穷多个点位于同一条直线，
可是他的定理挂一而漏万，
未能把别处的零点来判断.

哦，s 的 ζ 的零点到底在哪里？
需要精确结果，猜测无济于事，
为了加强素数定理，
积分路径不必放在近距离.

自从黎曼首次发表他的著名论文以来，“许多精力旺盛”的“出色的人”试图证明黎曼假设.颇有许多人甚至声称自己找到了证明，但是几乎不可避免地，正如该主题的历史所显示的那样，当他们的同行费心找茬（他们知道其中肯定有错误）时，这些证明一个个都被判了死刑.

【86】

6. 证明与反驳

很少有人理解它，根本无人证明它

——《时代》杂志 1943 年 4 月 30 日

在过去的数百年里，曾经有好几次数学家声称他们证明了黎曼假设. 但是，最离奇的莫过于 1959 年初发生在纽约哥伦比亚大学一次由美国数学协会主办的演讲上.[58] 一位 30 岁的杰出数学家约翰 · 纳什(John Nash)宣称自己证明了黎曼假设. 西尔维亚 · 纳萨尔(Sylvia Nasar)的《美丽心灵》以及美化形式的同名电影叙述了纳什一生的故事——他早年的杰出成就，后来的精神失常，以及最终引人注目但十分脆弱的康复.

从 14 岁开始，纳什在阅读了贝尔的经典著作《大数学家》后，迷上了黎曼假设.《财富》杂志将纳什誉为“世界上最有前途的数学家”，因此他的同事们当然会认为他能够作出证明. 纳什本人也曾向他的一些朋友和同事吐露，他相信自己有一个运用伪素数的思想能起作用，伪素数是指不是素数，但在某些方面与素数有相似性质的整数.

于是，约 250 名数学家济济一堂，聆听纳什的演讲，演讲厅里有一股期待的空气. 或许他真的作出了证明？但当纳什一步步深入到他的“证明”时，台下的数学家们越来越吃惊. 纳什的证明不仅仅是错的——简直就是无稽之谈.

唐纳德 · 纽曼(Donald Newman)如是说：“前言不搭后语.

人人都知道其中有错.纯属瞎扯.数学疯了.这与黎曼假设有何相干?一些听众不知所云.人们参加会议,听完演讲,然后走出大厅,拉住别人,试图弄明白刚刚听过的演讲.纳什的演讲不是好坏的问题,简直是恐怖."[59] 【87】

纳什的一位朋友卡特林·莫拉维茨(Cathleen Morawetz)后来在大厅里撞见了纳什."听众在笑他,"她说,"我觉得糟透了.我安慰了他几句,但被他打断.他似乎很沮丧."

但有些人并没有如此惊讶.一个月前,纳什告诉一个朋友说,他上了《生活》杂志封面,伪装成了教皇约翰二十三世.他的朋友问:"既然看上去像教皇,你又怎么知道那是你呢?"纳什回答说,"第一,约翰不是教皇的姓——他选了这个姓,第二,23是纳什喜欢的素数."

事实上,这次报告正是纳什精神分裂症暴露无遗的表现,此前,病情已经发展了一段时间,最终使他多年无法工作.到了20世纪90年代,他逐渐康复.1994年,他去斯德哥尔摩领取了因为许多年前的工作而获得的诺贝尔经济学奖.

没有人能断言,纳什是否因为集中精力研究数学上最难的问题而精神失常.但纳什自己肯定相信数学家容易精神失常."我不敢说数学家与精神失常之间有直接联系,"纳什在1996年说,"但是,大数学家无疑会遭受躁狂、谵妄和精神分裂症之苦."

没有什么能比那些试图证明却以失败告终的著名数学家的名单更能说明黎曼假设及黎曼ζ函数的难度和重要性了.爱德华(H. M. Edwards)在他的书中列出了好几个研究该假设的数学家:

> 没有什么数学工作比黎曼发表于1859年的论文"论小于某数的素数个数"更明显为经典之作了.黎曼之后许多大数学家——其中最重要的有哈达玛、冯·曼戈尔德(von Mangold)、瓦莱·普桑(de la Vallee-

> Poussin)、兰道、哈代、李特伍德、西格尔、波利亚(Pólya)、琴森(Jensen)、林德洛夫、波尔、塞尔伯格(Selberg)、阿廷(Artin)、海克(Hecke)——的许多工作,都直接源于包含在那八页纸论文中的思想.据传,阿道夫·赫维茨(Adolf Hurwitz)死后,从他的图书馆里找到一册黎曼文集的人发现,该书会自动翻到叙述黎曼假设的那页.[60]

【88】

二战期间,英国数学家阿兰·图灵(Alan Turing)在英国布莱切里(Bletchley)公园的密码破译工作中起了十分重要的作用.但他也未能抵制住黎曼假设的诱惑,在为后来的数字计算机奠定理论基础的过程中,图灵设计了一台机器来计算黎曼 ζ 函数的零点.给图灵作传的安德鲁·霍奇(Andrew Hodge)写道:

> 显然,由于付出如此巨大的努力却未能证明它,因而他[图灵]断定黎曼假设很可能是错的.它的错误意味着 ζ 函数确实会在特殊直线之外的某点处取零值,这个点可以通过蛮力来找,即通过计算 ζ 函数的足够多的值来找.[61]

图灵做了大量的工程研究工作,他计划研制 80 个相啮合的齿轮系统、重物附在离各齿轮中心特定距离处.当各齿轮旋转的时候,在离轴不同距离处旋转的不同重物的组合将产生不断变化的转动效果——称为力矩——图灵希望通过加入平衡重使整个系统达到平衡的方法估算出该力矩.在齿轮系统转动后,根据该力矩的大小,即可计算出新的黎曼零点.至少这是个理论.

图灵于 1935 年成为剑桥大学国王学院的研究员.他的朋友已经对他在国王学院的房间的凌乱不堪感到习以为常:

> 很容易发现各色各样的齿轮拼图撒满一地.肯尼

斯·哈里森(Kenneth Harrison)现在是一位研究员,他曾应邀去图灵家喝酒,看到的就是这情形.图灵试图解释所有这一切为的是什么,可惜未能成功.当然不容易看出这些齿轮的运动如何能解释当素数越来越大直到无穷时会变稀疏的规律.图灵开始切割真的齿轮,用帆布背包把坏件搬到工程系,断然拒绝了一位研究生的帮助.尚普(Champ)[一位朋友,全名大卫·尚佩尔农(David Champernowne)]帮他磨了一些轮子,这些轮子放在图灵房间里的一个小提箱中.[62]

【89】

但机器从未制成,因为更急的事来了——第二次世界大战爆发,需要破译敌人的密码信息.具有小小讽刺意味的是,现在从事素数研究的数论专家位于世界各地编制和破译密码活动的前线,利用从证明黎曼假设的尝试中所获得的知识,可以编制出实际上不可破译的密码.

图灵想要做的是利用他的机器找出至少一个不满足黎曼假设的零点,即不具有$\frac{1}{2}+ib$形式、实部为别的某个实数的零点.我们现在知道,即使他在剑桥的房间里成功地安装了他那奇妙的玩意儿并开始让它运转,也决不能找出一个推翻黎曼假设的零点.现代计算机——其思想的起源可以追溯到图灵——已经求出数十亿个零点,它们都牢牢地位于同一条直线上,其实部等于$\frac{1}{2}$.没有发现一点位于该直线之外.

但计算毕竟不等于证明.世界需要的是证明.但也不是没有过证明.1896年,哈达玛发表素数定理的证明时,鉴于"新近托马斯·斯蒂杰(Thomas Stieltjes)所声称的黎曼假设的证明"[63],他为自己在该课题上贡献不多而表示歉意.不消说,斯蒂杰在声称自己证明了黎曼假设之后,发现了证明中的一个漏洞,于是收回了自己的声明.一个著名数学家相信自己获得了数论的圣杯,

这样的事已经不是第一次了,而且也不会是最后一次.这样的事甚至刊登在 1943 年 4 月 30 日出版的《时代》杂志上.

在黎曼的照片下是这样的标题:"很少有人理解它,根本无人证明它."《时代》杂志的记者写道:

> 任何一位数学家,若想赢得不朽的名声,一个确实无疑的途径就是证明或推翻黎曼假设……,没有哪个外行理解过它,也没有哪个数学家证明过它.
>
> 上个月的一天,一条激动人心的消息传到了《美国数学会会刊》编辑、芝加哥大学阿尔伯特(Adrian A. Albert)博士的办公室.数学会秘书、宾夕法尼亚大学的克莱因(John R. Kline)教授发来电报,要阿尔伯特暂停发刊,一篇推翻黎曼假设的论文正在邮途上.它的作者是现住宾夕法尼亚的一位德国逃亡数学家雷德马切(Hans Adolf Rademacher)教授.
>
> 接踵而来的是雷德马切本人寄来的一封信,信中说,他的计算已经普林斯顿高等研究院著名数学家卡尔·西格尔检验并确认.编辑阿尔伯特准备将这篇具有历史意义的论文发表在五月号上.消息不胫而走,美国数学家听说后都摒住了呼吸.富有戏剧性的是,上周出版的杂志上却没有雷德马切的论文.原来在最后一个时刻,这位教授颓丧地发来电报,说证明出错了;经过重新检查,西格尔发现了雷德马切推理中的一个错误.美国数学家的感觉就像是假停战庆祝活动之后的早晨一般.编辑阿尔伯特说:"整件事的确激起了许多错误的希望."

【90】

复变函数需要小心处理,因为你不能确定他们的性态会和实变函数一样.例如,在实数系中,只有两个数能成为 1 的根:+1和-1.1 的平方根为-1 和+1;立方根为 1;四次方根为-1 和+1,等等.但在复数域中,1 可以有任意多个不同的根:例如,

有 29 个不同的 29 次方根.

雷德马切证明中的错误主要集中在这样的事实上:复数的对数与实数的对数具有完全不同的性态.

“复数对数没有唯一确定的值,”萨缪尔·帕特森(Samuel Patterson)说,“雷德马切在证明中在两个不同点处选择了两个不同的值.那样做很容易得出矛盾——假定黎曼假设是错的,如此这般做下去,得出矛盾,于是它必正确.卡塞尔(Cassels)教授[①]讲课时这样评论:‘所以我们可以用反证法来证明它——如此这般做下去,得出矛盾.这说明,要么我们原先的假设是错的,要么我们出错了.’”

即使是最优秀的数学家也会犯错误.布里安·康雷如是解释:“和任何人一样,你也会意外失足.当你在研究某个问题时,如果你自以为有了证明,尤其是在它的确很好的情况下,你立刻会变得对错误视而不见,很难看出错误来.你一次次回头检查,【91】却总是跳过那个地方.你必须经常拿给别人看,让他们从头到尾检查一遍.在长篇论文中间的某个地方,很容易埋下错误.我倒不认为有人故意要这么做,如果你太想得到证明,那么你就很容易忽视错误,被蒙蔽了双眼.”

每当谈及黎曼假设的证明,数学界就会很紧张不安.康雷举了几个例子,说明了人们是多么容易轻信谣言.有一则谣言是关于一位名叫勒文森(Norm Levinson)的著名数学家.

“1974 年,勒文森发现了一个新方法,用以证明绝大多数零点位于临界线上,”康雷说.“计算的技术性很强,但勒文森认为,他能够证明 98.6%的零点位于临界线上.一天早上,他给吉安-卡洛·罗塔(Gian-Carlo Rota)看一篇稿子,并说他能证明 100%的 ζ 函数的零点位于临界线上.罗塔说:‘是真的吗?’勒文

① 卡塞尔(John Cassels)是剑桥大学三一学院著名的英国数论专家.——原注

森拿起手稿，开玩笑说，‘是的，在这儿我证明了 98.6%的零点位于一条线上. 我把剩下的 1.4%留给读者.’罗塔没听懂这个玩笑，也没意识到 100%的零点位于同一条线上与黎曼假设并非同一回事. 于是，他开始告诉别人说，勒文森已经证明了黎曼假设. 到了下午，消息传到了西海岸. 在勒文森的结果中，人们发现了一个错误，不过他的确证明了至少有 1/3 的零点位于临界线上. 对他的方法进行修正，得到了目前 40%的零点位于临界线上的记录.”

另一个惊人之处是，从康雷的叙述中，数学界一不小心发现“100%的零点位于同一直线上并不等同于黎曼假设”. 换言之，100%并不等同于“全部”.

格兰韦尔试图解释其原因. “在数论上，”他说，“我们指的是，如果你取前 100 个数，说其中 90 个数具有某种性质，即 90%的数有这种性质；然后，再观察前 1 000 个数，其中 990 个具有这种性质，即 99%；再观察前 10 000 个数，得 99.9%，依此类推. 决不可能所有整数都具有这个性质，但百分比在逐渐增大. 当你取到无穷

【92】 大时，百分比就增大到 100%. 我们所说的 100%就是这个意思，这就是为什么不是‘全部’. 两者有很大的差别. 事实上，我于 1985 年证明了费马大定理对于 100%的指数成立——即对于 100%的 n，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有解. 但这是个毫无意义的结果. 你无法展开说‘对于所有的指数’. 因而结论并不深刻.”

格兰韦尔告诉我们，塞尔伯格曾写了一篇论文，说在很短的区间上，素数个数恰好等于你预测的数的概率为 100%. 接着，一位名叫海尔穆特·梅尔(Helmut Meier)的数学家撰文推翻了上述结果.

“读那篇论文真是件令人高兴的事，”格兰韦尔说，“已写的成千上万篇论文都索然寡味，但海尔穆特仅用四页纸，通过令人难以置信的原始方式将一些思想联系在一起，证明每个人都错了，甚至塞尔伯格也错了. 人人都错了.”梅尔说明的是，即使概率为 100%，也依然存在无穷多个反例. “这正是如此令人震惊的地方，

有一大堆反例，从某种技术意义上讲，是很大的一个无穷大数.”

数学家们如此迫切地希望看到黎曼假设的证明，以致很容易上当受骗.

“流传着一则4月1日的玩笑，”布里安·康雷对我说.“阿兰·康尼斯设计了一个能证明黎曼假设的程序，他正在高等研究院作一些报告.有一封电子邮件在4月1日四处传开——很搞笑——说的是有一位聪明的物理专业学生听了康尼斯的演讲后，联想到了玻色子(bosons)和费密子(fermions)，从而找到解决该问题的正确方法，当晚就完成了证明.消息传开，许多人认为那是真的.但这只不过是一则愚人节玩笑罢了.”

除了著名数学家试图去证明黎曼假设，还有大量数学狂怪自以为给出了证明.这些人对数学一知半解，不理解复变函数的精微之处.

罗格·希斯-布朗(Roger Heath-Brown)和这些人打过很多次交道.“我经常收到一些主动寄来的稿子——某某人有个想法，无论你指出他的错误多少次，他总是会作出修改，另外再炮制仍是错误的一篇.其中一类常常是第三世界国家的人，他们有一份大学教职，终生致力于数学研究，但或许没有受过一名英国学者所受过的那种正规训练.但也有一些脾气古怪的一流数学家孜孜不倦地研究该问题，很难找出他们的错误.让我感到忐忑不安的一件事是：我为何要花一周时间去找一篇我绝对相信是错误的稿子里的错误，然后真的找出那个错误，而我得到的回报却是一个月后又收到了另一篇稿子.”

【93】

布里安·康雷喜欢引用一个故事，这个故事是由最重要的数论刊物之一《算术纪事》(*Acta Arithmetica*)的编辑讲的.一天，他收到一篇证明黎曼假设的稿子.他将稿子扔到一边，看看何时会稍空一些.一周后，他又收到同一个作者的另一篇推翻黎曼假设的稿子.在所附的信中，作者要求编辑告诉他哪一篇稿子是正确的.

正如亚历山大·伊维克所说到的，有时甚至政治也会在黎

曼假设的舞台上粉墨登场. 有一位名叫尼科莱·伽弗里洛夫(Nikolai Gavrilov)的苏联数学家,20 世纪 60 年代初期,他曾是乌克兰某城市的共产党领袖. 伽弗里洛夫是个业余数学家,他抓住黎曼假设不放,自认为已经给出了证明. 由于大权在握,他设法让他的证明发表出来. 幸运的是,该证明真的发表了. 要知道,那时的苏联正和美国在一切领域进行竞争——包括宇宙、高新技术等等——他们拥有十分优秀的数论专家和一般的数学家. 特别是盖尔范德和林尼克(Yuri Linnik). 据说,当这两个人拿到黎曼假设的错误证明时,盖尔范德犯了心脏病,林尼克喘着粗气,几乎窒息而死. 他们感到十分沮丧,因为这一黎曼假设错误证明的发表对苏联的数学造成了很大的伤害.

1984 年,巴黎有个会议,一位日本数学家松本诚所作的报【94】告至今仍留在当时正从事黎曼假设研究的好几位数学家的记忆中. 萨缪尔·帕特森对这个报告尤其感兴趣,因为松本承诺自己将讨论 metaplectic 群,对这种群帕特森自己已研究多年.

"我期待着松本讲讲 metaplectic 群,"帕特森说,"但到头来他讲的却是他要构造的某个球面函数,他声称,如果它大于零,那么黎曼假设成立. 所以他需要证明该球面函数大于零. 没有人抱有奢望. 事实上,报告结束后,好几个人上去问他是否真像他所说的那样. 他回答说,'是的.'报告之前,他丝毫没有给出任何暗示要讲这个. 报告持续了大约 1 个半小时,直到中饭时间,在巴黎,这就意味着他要中断报告. 他提出某些思想,但显然无济于事,但另一方面,他是一位有着很好的成绩记录的数学家(至少我不敢小觑),而不是你可以当成狂怪的那种人. 我看过他写的有关论文,这些论文尚未广泛发行,文字简练,文笔极佳. 事实上,多数人没拿他当回事——这是巴黎数学生活的特点——但对我来说,由于我的研究与他的另一些研究密切相关,因此除了认真对待他,别无选择."

亚历山大·伊维克也听说了松本的"证明",他惊呆了:"当

时，我正在写一本名为《黎曼 ζ 函数》的书，后来由 John Wiley & Sons 出版社出版. 全书共 536 页. 现在，哪怕是写那么长犯罪小说的人都知道那可是鸿篇巨制. 我于 1984 年夏天提交此书，那年秋天有传闻说，一位在巴黎生活和工作的日本数学家利用我事实上一无所知的方法证明了黎曼假设. 有个普林斯顿的朋友，他要到了松本的讲课笔记，把它寄给了我. 此书让我更加烦恼，因为除了开始的几句或几页之外，不知所云. 你可以想像好几个月生活在无知之中的我有多么痛苦和颓丧——我花了这么多的功夫来看这本书. 我本该很高兴、也很欢迎黎曼假设的证明，肯定如此，但这本书意味着我多年的辛苦工作毁于一旦. 所以当我得知这个传闻是错误的时候，感到如释重负，松本因而也被抛到了脑后.” 【95】

这一次并没有人正式撤回声明，只是各种感兴趣的人物竞相“找茬”. 其中一位是本桥，另一位关心证明是否正确的日本数学家小平邦彦和他有过接触. 本桥通过研究，发现松本所犯的错误似乎与 40 年前《时代》杂志报道的雷德马切的证明中的错误相似.

“小平邦彦要我读一读、并分析一下那篇论文，我从他那儿得到了松本的手稿，”本桥告诉我说，“由于他定义了黎曼 ζ 函数的对数，我立即发现了一个错误. 这是件相当难的事——因为我们是在取黎曼 ζ 函数复数值的对数，所以必须十分小心，但他不知道怎么小心. 如果我们想当然认为他的理论是正确的，那么黎曼假设便立即出笼了.”

帕特森也花了很多时间去理解松本的“证明”：“文中似乎有个新思想. 此前我并没有真正研究过黎曼 ζ 函数. 就我而言，我并不把它看作是什么有利可图的东西，但为了弄清松本所说的内容，我投入到对黎曼 ζ 函数的研究之中. 经过数年的思考，我终于确信它是错误的. 但那是最为严肃的尝试.”

年复一年，当顶尖的数论专家们详细讨论松本、乌克兰党魁



伽弗里洛夫，种种谣传，愚人节电子邮件所声称的证明时，另一位被同事所忽略或有意避开的数学家却在默默地进行着黎曼假设的证明. 2002 年初，他最终完成了黎曼假设的最后证明. 他就是德・布兰奇，一个你会觉得不能小觑的人物，因为他先前已证明了另一个著名的定理——比伯巴赫(Bieberbach)猜想.【96】

7. 比伯巴赫猜想

人们很容易轻率地认为德·布兰奇是个怪人……

但他有权申辩，因为人们先前抹杀他在比伯巴赫猜想方面的工作是错误的.

——希普曼(Joe Shipman)[64]

大众对数学的普遍看法是，它主要与计算相关. 但许多人不知道的是——数学家们已经一致放弃纠正他们的误解——数学家常常不是一个好的计算者，有时甚至比一般非数学家更糟. 我第一次见到法国-美国数学家路易斯·德·布兰奇时发生的事情很好地说明了这一点. 当时，我们正在讨论这样一种看法：数学家所有最好的工作都是在年轻时候做出的. 我问他何时产生了某种灵感.

"让我想想，"他说，"那是 1984 年的事，我生于 1932 年. 所以我已年过半百了吧？那时我的岁数……？"

他想了一阵子，就像在思考黎曼假设这个问题本身一样，然后放弃了(因为精确的数字并不重要，而不是因为他算不出这个数字). 即使是数学巨人也难免如此："牛顿先生，"一位评论者说，"尽管对代数和流数术研究得如此深入，却算不好一笔普通的账目：在他当造币厂厂长时，常常让别人帮他结账."[65]

19 世纪 40 年代在德国生活和教书的职业数学家库默(Ernest Kummer)在初等算术方面也很糟："一个故事说，他站在黑

板前算 7×9.‘啊,’库默对全班中学生说,‘7×9,嗯,啊,是…’‘61,’一名学生自告奋勇地说.‘很好,’库默边说边在黑板上写【97】下 61.‘不对,’另一名学生说,‘是 69.’‘先生们,’库默说,‘不可能有两个结果呀.必是其中的一个.’”[66]

100 年前,一位美国数学家说:“数学是一门数数或计算的艺术,就像建筑是一门制砖或伐木的艺术,绘画是在调色板上混合色彩的艺术,地理科学是一门敲碎岩石的艺术,或解剖学是屠宰的艺术一样.”[67]

这些轶事反映了我们大多数人对数学的看法与今天的数学家实际研究的复杂抽象的知识体之间的巨大差异.路易斯·德·布兰奇的工作处于这种抽象性之核心,他对此作出了很大贡献.

2000 年 8 月,我去法国拜见德·布兰奇,和他一起讨论了好几天的数学.我觉得,除了和各地数学家们谈论他们对黎曼假设的看法以及数学的其他方面之外,我还需要去深入挖掘一个数学家做研究的动力所在.路易斯·德·布兰奇给我的印象是,他与黎曼假设的关系正处于关键阶段.

我原计划离开伦敦去他那里一天,把我的计划告诉他,了解他研究黎曼假设的进度,以及黎曼假设在他的生活中所扮演的角色.德·布兰奇感到很惊讶,我竟然会认为完成此事只用一天或一天一夜就够了.

“我想你实际上应该在这里呆上一周,”他说,“这样,除了黎曼假设,我们就可以讨论数学的历史,它对社会的价值,数学教育的现状,等等.”

最后我们商定三天,我星期天去法国,星期二晚上回.

德·布兰奇是印第安纳州普度大学的名教授,他正在距巴黎 50 公里远的一个小村庄度暑假.1989 年,他因证明了比伯巴赫猜想获得了一笔奖金,他用这笔钱在那里买了一套房子.

我本可以从一打或更多研究黎曼假设的数学家中的任何一

人开始我的研究，但我却选择了德·布兰奇，原因很简单：他告诉我说，他已经在对证明作最后的检查了. 激动了一阵子之后，我打了两三个电话给别的数学家，了解到尚未有其他人郑重地说过这样的话. 德·布兰奇已经不是第一次声称对黎曼假设的证明作最后的检查了. 他的同事告诉我说，德·布兰奇“没有机会”给出证明；他“总是对人说他给出了证明，但他的证明总是漏洞百出”；对于黎曼假设的证明，他在“南辕北辙”；等等. 我感觉得到，这些人说话的口气很肯定，但是他们的怀疑反而激起我进一步了解德·布兰奇的愿望，并希望藉此了解黎曼假设到底是什么以及数学家在试图证明一个重要假设时，到底在做什么. 【98】

这是个思考黎曼假设已经长达二十多年的人. 他当然会和其他数学家一样了解黎曼假设，即使是他在寻求证明时走错了路子. 比伯巴赫猜想的证明总是他的功劳.

这个猜想最初是由德国数学家比伯巴赫于 1916 年提出来的一个数学论断. 一部数学辞典对它的描述如下：

> 该猜想于 1985 年被路易斯·德·布兰奇证明. 它说的是，如果 S 是正规单射函数解析类，由单位圆盘上与形如 $z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots(|z|<1)$ 的幂级数一一对应的解析函数组成，那么对于 S 中的每一个函数，其系数满足 $|a_n|\leqslant n$（n 为一切正整数）. [68]

任何一个非数学家在读到这段话时都会感到其不知所云. 诸如“正规”、“单射”、“解析”、“单位圆盘”之类的术语在日常交谈中都不会出现. 如果读者为了更好地理解这段话，到同一部数学辞典中去查阅每一个很陌生的术语，那么他/她所查到的定义又会使用下面这样的术语：“正交分量”、“向量”、“上域”、“集合”、“复导数”、“柯西-黎曼”、“邻域”、“度量空间”等等. 依然不知所云. 显然，正如你不可能通过查字典里的每一单词来读一本法文书一样，你也不可能通过查字典来掌握数学. 需要更深层次的

【99】 理解.

“和朋友在一起时,”精神分析学家阿尔弗雷德·阿德勒(Alfred Adler)写道,“作家可以讨论他们的书;经济学家可以讨论经济现状;律师可以讨论他们最近的案子;商人可以讨论他们最近的盈利;但数学家根本不可能讨论他们的数学.他们的研究越深入,就越难理解.”[69]

比伯巴赫是个反犹太者.他认为数学思维是有遗传的,这种遗传导致了德国数学家与犹太(或法国)数学家之间的差异.在1934年发表的一篇文章中,比伯巴赫以两类数学家对虚数理论的思维方式为例,解释了他的上述观点.

“技术上的精湛和对概念的玩弄乃是敌视生命、冷血的S-型的特征,”他写道.(按比伯巴赫的说法,犹太人即属于S-型).哈代在《自然》杂志上撰文评论这一非同寻常的理论,在文章的结尾,他说:

> 我只想加一个评论.在强烈的政治激进的非常时期,过多批评这种言论是不合适的,即便是对科学家的言论也是如此.我们中有许多人,包括许多英国人和许多德国人,他们在一战期间说了一些我们不愿提及也不堪回想的话.对自己地位的焦虑,对落后于不断攀升的愚蠢行为的担心,对不惜一切代价争先的决心,这些,如果不是出于逞英雄的借口,都是自然的.比伯巴赫教授的名声不容许我们对他的言论作出这样的解释.我不得不作出更不近人情的结论,即他真的相信那些言论是对的.[70]

但比伯巴赫猜想乃是复变函数的一个重要结论.德·布兰奇于1984年,即在首次提出该猜想66年后,成功地作出了证明.这是一项不小的数学成就,即使是今天那些不拿德·布兰奇当回事的数学家也不否认这一成就的重要性.

事实上，当我阅读德·布兰奇的论文以及有关比伯巴赫猜想的文献时，我开始觉得，人们当初否认在比伯巴赫猜想方面的工作，与今天人们对他在黎曼假设方面工作的评价是相似的. 一本介绍德·布兰奇研究工作的书的编辑写道："1984 年 3 月，消息开始传开. 路易斯·德·布兰奇声称自己证明了比伯巴赫猜测. 他的证明方法具有完全意想不到的来源：算子理论和特殊函数. 这事在当时看来显得异想天开，但最终却证明是正确的."[71] 【100】

比伯巴赫猜想主要探讨包含许多项的一类数学式子，其中的每一项都含有一个未知复数 z 的幂. 式中可能有 z，z^2 和 z^3 等等，每一项被乘以不同的数 a_n. 因此，你可以将它写成 $z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+a_5z^5+\cdots$. 比伯巴赫猜想是指这些 a_n 决不会大于 z 的次数. z^2 的系数不会比 2 大，z^6 的系数不会比 6 大，等等.（我知道这一解释不足以深刻理解比伯巴赫猜想，但要理解该问题本身，知道它就足够了.）

从 1916 年到 20 世纪 60 年代期间，数学家们相继证明了逐次增大的 n 值的结果. 比伯巴赫证明了 z^2 的系数，其他数学家证明了 z^3，z^4，z^5 和 z^6 的系数，各人所用方法完全不同，并且十分复杂. 但无人能证明一般结论是否成立——直到德·布兰奇的出现. 哈佛大学的拉斯·阿尔福斯（Lars Ahlfors）介绍了此项成就的来龙去脉：

> 关于这一证明，最引人注目的事是，它是由一位著名的成熟的数学家，而不是由一位名不见经传的初出茅庐的年轻人作出的. 再想想，或许并不怎么令人惊讶. 千真万确的是，该猜想决不可能在几年内证出来，比伯巴赫不能，其他任何人也不能. 一方面，当时的数学技术还不够完备. 事实是，在一个人完成证明之前，必须做大量预备性的工作. 事实上，在找到证明之前，已经进行过长达 68 年的相关研究. 如果没有德·布兰

> 奇，是否用50年就能完成证明，或是否要用100年才能完成证明，这是个无法回答的问题．但几乎不足为奇的是，这个问题必须等到计算机时代才能得到解决．[72]

德·布兰奇在好几年里一直在寻找证明，比赛的最后阶段始于【101】一个冬天，当时，他请教位于印第安纳州拉法叶(Lafayette)的普度大学的同事高奇(Gautschi)，高奇后来回忆道：

> 大约在1984年2月3日，路易斯·德·布兰奇来到我办公室，问我是否可以抽出一分钟时间和他谈谈他正在做的某项工作；或许我能对他有所帮助．我清楚地记得，我当时的第一个反应是："我？帮德·布兰奇？"我们彼此几乎不认识，在普度大学的20年左右时间里，从未在一起切磋过数学——所以我相信——我们没有什么共同语言．他坐下来告诉我，他有了证明比伯巴赫猜想的方法，但需要建立某些涉及超几何函数的不等式．他感到值得先在计算机上尽可能多地检验这些不等式．我能帮他做这件事吗？[73]

要理解此事的重要性，无需知道什么是"不等式"或"超几何函数"．很明显的是，德·布兰奇的研究已经到了关键之处，他相信，需要最后的一个信息来完成证明．当时高奇很忙，他告诉德·布兰奇自己不能直接给予帮助，但最后他还是帮了忙．但在电脑上花费很多时间之前，高奇决定先检查一下是否已有人证明了德·布兰奇正试图证明的不等式．

"我知道世界上只有一小部分数学家有可能熟悉这类结果，甚至给出证明，"高奇写道，"密歇根大学的狄克·亚斯凯(Dick Askey)便是其中之一，此人我很熟悉．于是，我在2月29日打电话给他，告诉他这种不等式以及德·布兰奇所说的作用．他马上打断我的话说：'我不相信！'他还列举了过去许多人所作的奇谈怪论．"[74]

亚斯凯后来说,德·布兰奇的想法是"荒唐的……高奇给了我不等式,说它可能是成立的,但又说它可能很难证."尽管他不相信,但那天晚上,亚斯凯查阅了8年前他和一位同事合写的一篇论文."让我惊讶的是,"他说,"德·布兰奇所需要的不等式在这篇论文中已经得到了证明."[75]

高奇在家备课到很晚."电话铃响了,"他说,"我听到了电话另一端传来的狄克·亚斯凯的胜利的声音:"这个不等式不是猜想——而是个定理!"① 【102】

德·布兰奇不知道他为了完成比伯巴赫猜想的证明所需要的结果已经被证明,这或许无可厚非,因为连给出证明的人自己都不记得了.事实上,亚斯凯仍不相信这个发现会对德·布兰奇有帮助,但高奇对这个消息感到十分高兴:

"在亲自检验并确认了这个结果后的第二天,我去见路易斯,告诉他这个好消息.他一本正经地回答道:'好的,那就证明了比伯巴赫猜想.'"他对了.[76]

两个月后,德·布兰奇飞圣彼得堡(当时叫列宁格勒),在苏联顶级的数学研究中心斯捷克洛夫(Steklov)研究所报告他的证明.他已受到邀请,在该研究所工作三个月,那里的同行数学家似乎并不像一些美国同事那样轻视他.

"我在列宁格勒的日子,"德·布兰奇说,"是我一生中最快乐的时光之一.每天早晨起床后,到附近的一个大公园散步.然后是洗澡,吃饭,购物,随心所欲.周二和周四是讨论班时间.在这两天里,我乘地铁去市中心,沿着 Nevskii Prospekt 大街走到数学研究所,研究所位于穿过这座城市的一条运河的岸边."[77]

但即使在这里,当他在一次讨论班上在俄国数学家面前讲述他的证明时,他仍然感到需要说服他们.

---

① 猜想是一个试验性的假设,而定理则是已证明为正确的命题.——原注

“我被介绍给了米林(Milin)教授，他显示出一副顽皮的神情，我把那解释成对我工作的正确性表示怀疑. 几分钟后，这似乎得到了证实. 他问了一个有关彼得逊(Peterson)猜想的问题，该问题的证明中存在一个尚未纠正的错误. 似乎没有一个人相信我演讲中的片言只语.”[78]

之后举行一个会议，德·布兰奇并未出席. 会上，一两位知道德·布兰奇工作价值的数学家说服了他们的同事.

“在第三次讨论班上，米林教授和我握手，”德·布兰奇说，“他的眼光中不失幽默，他说我是个很有天赋的数学家. 他还说我的论证很漂亮.”[79]

【103】

验证德·布兰奇对比伯巴赫猜想的证明是一项长期而艰巨的任务. 尼科莱·尼科尔斯基是参与验证者之一. 尼科莱·尼科尔斯基是一位衣冠楚楚、精瘦结实的数学家，现年 60 岁，在法国波尔多(Bordeaux)大学工作，他熟悉、尊敬并理解路易斯·德·布兰奇，这在数学家中是独一无二的. 由于在戈尔巴乔夫时期，苏联陷入混乱，他于 1991 年离开俄国，从那时起一直在法国工作. 20 世纪 80 年代，他在斯捷克洛夫研究所工作. 尼科尔斯基在炎热的八月天仍然穿着长袖，背靠坐椅，他那充满活力的眼光从金属框眼镜中透射出来. 他操着流利的、但文法不怎么样的英语向我讲述了在斯捷克洛夫研究所的数年时光，在那里，德·布兰奇的比伯巴赫猜想证明好不容易成形了.

“[德·布兰奇]带着约 400 页的含有该证明的手稿来到列宁格勒. 手稿中恰好含有 100 个定理，第 100 个定理即为比伯巴赫猜想的证明. 第 100 个定理基于第 99 个，第 98 个等等. 我把这些定理分发出去检验. 人们变得十分热情. 但是，尽管证明白纸黑字写在那里，但许多人还是不相信它——尤其不相信我——所以一开始我就起着关键作用.”

“所以在整整三个月里，一个研究小组一直在审查这些定理. 但他们不时来找我，总是重复着同一句话：‘这第 99 个定理是错

误的,这儿是个反例.'德·布兰奇常说:'不要紧,结果并不十分依赖于这一部分.'一周后,又有另一个人来说:'第98个定理不对——这儿是个反例.'他们常常会给我几张纸,我把它们放在书桌的抽屉里.就这样,我们回溯到定理82,它们都是错误的.一天,有位年轻人打电话给我,说:'我刚找到理由——我在这些定理中找到了某些正确的东西,所以有可能展开成证明.'两三周后,这些尚未得到学位的博士生们带来了真正的证明的主要细节.

"完成检查是件大事。研究所所长法德耶夫(Fadeyev)(后任国际数学联盟主席)在一个大型研讨班上向德·布兰奇道贺. 【104】之后,我开始对德·布兰奇自己如何证明这个结果产生了兴趣.在列宁格勒的这三个半月里,我们常在一起交谈,在城里散步,等等,彼此成了朋友.我们开始重新考虑和整理整个理论.我们花了2年时间,写成了各占80页长的两篇论文,于是才理解该证明的真实的起源."

从表面上看,比伯巴赫猜想的证明更多的似乎是合作的结果,而不是单个数学家的成就.这正是威斯康辛大学修·蒙哥马利的看法.

"德·布兰奇确实有着丰富的思想,但如果没有其他数学家对他的工作所作的批判,他就不能将它们结合起来.有个故事说,他应邀访问俄国,就另一个主题作演讲时,他说:'好的,如果你们给我同样多的时间讲比伯巴赫猜想,我就给你们讲这个主题,'当时,来听他演讲的人中有一些是该领域很好的俄国专家,德·布兰奇作报告,他们会提一些批评意见.在俄国,演讲的气氛有时很活跃,听众可以随时打断演讲者.德·布兰奇作报告时常常被打断,第二天,他会回来再作报告,又被打断.这样,到了他离开俄国时,他已有了大部分的证明.他将其归到一点,如果证明了某个不等式,那么比伯巴赫猜想就成立了.结果,这个不等式恰好是文献中已经证明过的不等式,因此无需再做任何事情,或提供进一步的数值验证,证明就完善了."

事实上，对一个给出原始证明的数学家而言，证明中包含有需要进行验证的假设一点也不奇怪. 一个重大证明的关键在于能看到证明整个轮廓的数学家的远见. 19 世纪 50 年代，英国探险家布尔顿(Richard Burton)提出一种信念，认为尼罗河的发源地离人们原先提出的位置有一千英里远. 在他的想法被证实以前，他有很多工作要做——还有许多死胡同要探索. 他也需要其他许多人的帮助才能达到目的，但这并不能否定他原先的洞察力.

【105】 耳边回响着未来国际数学联盟主席的赞扬声，德·布兰奇荣归故里，坚定了他对美国数学同行们的不满.

德·布兰奇成功证明了比伯巴赫猜想后，人们很难区分发生在美国数学界的一系列事件的真伪. 德·布兰奇认为，即使是在他功成名就的时刻，他的荣誉仍然被妒忌的、才能不如他的同事们夺走.

"关于比伯巴赫猜想，"他说，"大灾难发生了. 我的工作没有被接受. 其他人重写了我的证明，他们说，'这是德·布兰奇对比伯巴赫猜想的证明，'于是，那就被当作是我的证明，我对此事的看法却被拒于千里之外. 现在，我一直在反对，因为这不是我的证明. 由于我了解数学史，我觉得这类事情以前从未发生过. 这就是为什么我会认为我们这个时代与过去不同的原因之一. 我已证明了一个结果，在我看来，我就是该课题最在行的人. 我不得不去圣彼得堡寻求检验，把我的手稿分发出去. 但尽管如此，别人将事情重写了一遍，并硬说那就是我的证明."

在证明比伯巴赫猜想之后的岁月里，当德·布兰奇把注意力转向黎曼假设时，他依然对同行们的反应感到闷闷不乐. 但是，我交谈过的每一位数学家都承认他毫无疑问是一名出色的数学家，其中包括高等研究院的彼得·萨纳克.

"比伯巴赫猜想的证明是一项巨大的成就，这是毫无疑问的，"他说. "路易斯·德·布兰奇作出了划时代的贡献，真的. 那是个大难题……，他的证明绝对高超，绝对高超."

但是，随着德·布兰奇证明黎曼假设的方法浮出水面，一些

数学家由于相信他的证明有误,因而降低了对德·布兰奇能力的评价.

“德·布兰奇的理论很棒,”布里安·康雷说,“他有一个关于整函数零点之类的很好的理论,那是个很漂亮的理论……,是很好的数学.只是它不适用于黎曼假设.”

“他的工作见解深刻,充满智慧,”布里斯托尔大学的约翰·济廷说,“但并不正确.” 【106】

2000年8月,我和德·布兰奇在当地一家酒吧吃三明治,讨论同行对他的反应.他的诚实让人疑虑顿消.事实上,他甚至对自己有多诚实也很坦白.

“我和别的数学家的不同之处在于,”他说,“我似乎具有别人有时并不具备的深深的诚实.这相当奇怪,因为我年轻时并没有那种意图.我觉得我是个生性很爱走捷径的人——尤其是如果我觉得事情并不重要——并非为了实际好处,而是我就是选择这样做的.但我的生活演进方式有悖于我的偏爱,结果,我成了不同寻常的谦谦君子.”

人们很容易对这样的话嗤之以鼻,以为他在不停地告诉你说自己如何谦虚,目的是为了证明他是世界上最谦虚的人.但德·布兰奇经常告诉我一些其他人会三思后才愿意说的事情.

“我的头脑并不很灵活,”他告诉我说.“我专注于一件事而未能把握整体.所以当我专注于一件事时,实际上会忘记其余的事.一段时间后,我会记起整件事情来,知道自己遗漏了其余的事.发生这种情形时,我不得不小心翼翼,以免使自己陷入某种沮丧的境地.你期望某事将要发生,期望已经发生了大变化,这个时候你不得不意识到原来自己是如此的脆弱,你必须给自己时间等候,直至真理出现.”

第一次见面时,德·布兰奇显得有点心事重重.最近几周里,他一直在听法国高速公路法规课,每周有2至3次.为了能在法国开车,他必须通过驾驶考试,因为他的印第安纳驾照在法



国是不承认的.我很惊讶地发现,对这次考试他感到很紧张,当他告诉我一些让他头疼的问题时,我更吃惊了.有一个问题是关于车速限制的,写有 80 的标记,在通过 60,80,100 三个指示牌后,可以用哪一种速度行驶.在课上,教师提出了测试题,德·布兰奇总是在应该回答“60 和 80”的时候错误地回答 80(因为很显然,如果允许你以每小时 80 千米的速度行驶,当然也可以以每小时 60 千米的速度行驶).如果第一次问你这个问题时答错,【107】这并不奇怪,但德·布兰奇每次被问到这个问题时竟然都难以记住他必须回答两个速度.“我不断出错,”他说.

在美国发生了一些不愉快的事,在一次德·布兰奇觉得自己受到冷遇的有关他的证明的专题研讨会上,这种不愉快达到了高峰.之后,他作出了一个主导他接下来 15 年研究生涯的决定.他决定马上开始黎曼假设的研究.

“我在圣彼得堡受到鼓舞.比伯巴赫猜想和黎曼假设之间存在着深刻的联系,这种联系尚未完全为人们所理解.所以我觉得最终的事实是,比伯巴赫猜想将与黎曼假设统一起来.但是目前还不能具体描述出这种统一性.在我学术生涯中的那一个时刻,我已年过半百,我无法放弃.我要将我的余生全部致力于此事.”

当我和德·布兰奇以及其他人谈论他的黎曼假设研究以及普遍被人忽略时,我不断遇到当初人们对他的比伯巴赫猜想研究的反应类似的情况.亚斯凯回顾他当初为什么对德·布兰奇的“神奇证明”表示怀疑时,他说了很多事情.这些事情在我看来乃是德·布兰奇在报告他的黎曼假设研究工作后所耳闻目睹的反应的准确预兆:

> 对于德·布兰奇所做的两件事,要说的东西很多.他在研究一个难题,过去他研究过别的难题,但并没有因过去的失败而气馁.还有,不与同一领域的专家交谈,或者至少不在乎他们的悲观态度,这常常是很有利

的.单值函数专家会告诉德·布兰奇他的方法行不通,但他们可能是错的.我的反应相类似.我在一个方向上了解得太多,我的乐观导致了许多高深的不等式,但我对另一领域知之不多.这两者导致了没有根据的怀疑.不要太在乎专家的悲观看法,而应在乎乐观的看法,因为它们常常会导致某个重要的东西……重要的事实是德·布兰奇的证明,而不是他是否发表了别的猜想的错误证明.德·布兰奇是个单值函数方面的门外汉,这个事实很重要,但了解他早期工作的人中,没有一个人能够说他处于学术界的边缘.如果你不了解,那么你最好什么都别说.[80]

【108】

这个评价多半可以直接适用于德·布兰奇今天的研究.

"他在研究一个难题,过去他研究过别的难题,但并没有因过去的失败而气馁."所有这些因素都将破坏德·布兰奇让自己的黎曼假设研究为人们所认可的尝试.

"……不在乎他们(专家)的悲观态度,这常常是很有利的.单值函数专家会告诉德·布兰奇,他的方法行不通,但他们可能是错的."数论专家费心与德·布兰奇通信时,他们通常会告诉他,他研究黎曼假设的方法是行不通的.

"重要的事实是德·布兰奇的证明,而不是他是否发表了别的猜想的错误证明."他所发表的关于比伯巴赫猜想和黎曼假设的错误证明大大影响了他的同行和同事对他后来的出版物的态度.

事实上,资深的数论专家塞尔伯格告诉过我们,德·布兰奇的错误证明对他的形象造成了什么样的损害."问题是,持有一成不变的看法是很危险的,思维定势的人到头来总是要找出某种方式来说服自己他是正确的.路易斯·德·布兰奇一生中已犯了很多错误.从这个意义上讲,他并不是最可靠的数学资源.

我曾对某人说——它有点像个恶毒的笑话，但我偶然会说说——在他们最终验证了德·布兰奇对比伯巴赫猜想的证明之后，我说，路易斯·德·布兰奇已经犯了各种各样的错误，而这次他犯了正确的错误！”

还需要指出的是，许多人把德·布兰奇看作是粗鲁、专注、痴迷和固执的人. 总之，不难理解许多同事何以会对他关于黎曼假设的新近研究置若罔闻，而他自认为这些研究是值得人们关注的. 21 世纪伊始的问题是：德·布兰奇能故伎重演，用证明比伯巴赫猜想的方法来证明黎曼假设吗？当今世上多数数论专家都对他的最新研究漠不关心，这对吗？【109】

8. 寻找零点

数字或多或少是我的朋友. 但对你来说并非如此.

3 844 是你的朋友吗? 对你来说,它只是一个 3,一个 8,一个 4 和一个 4. 但我要说,"嘿,62 的平方!"

——韦姆·克莱因[81]

数学家们的内心生活对其他人来说是个封闭的世界. 一个非数学家怎能想像一个数学迷坐下来读一本名叫《整数序列手册》的书? 此书出版于 1973 年,出版后十分畅销,22 年后,又出版了续本《整数序列百科全书》.[82]两本书包含了一页又一页精心安排的数字,如果你在日常生活中遇到一个不熟悉的数列,你可以在书中查到是否有产生该数列的规律.(第二章的章名为"如何处理陌生的数列",其写作方式有点像探险者求生指南)

且让我们打开这本书,看看它的魅力所在. 第一个数列是 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,…. 这叫"零数列". 在下面两个平凡数列之后,便是 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,…. 这显然是"最简单的正数序列". 然而,再跳过下面几个数列之后,是如下让我们感到更兴奋的数列:1,1,0,1,2,0,0,1,1,2,0,0,2,0,0,1,2,1,0,2,0,0,0,0,3,2,0,0,2,0,0,1,0,…. 这恰好是"将 n 写成少于或等于两个的平方数之和"的方式个数. 有一个数列为 1,3,7,19,53,149,419,…,是用 n 个乐高拼块可以搭成的

稳定小塔的个数;而另一个数列 1,2,4,7,11,16,22,…乃是将薄
【110】烤饼切 n 次所得的最大块数. 世上真有无需认真练习的事情!

若知道素数在这本书中扮演的重要角色,你会去猜猜下面这个数列所代表的意义:

2,11,101,1 009,10 007,100 003,1 000 003,
100 000 019,100 000 007,1 000 000 007,
100 000 000 019,100 000 000 003,…①

《百科全书》中关于某些数列的注释很不够. 8,28,89,234,512 这五个数显然构成了"邮票问题". 从 2,10,74,518 开始的数列听起来十分吸引人:它是"在钻石晶格上走($2n+1$)步"问题.《百科全书》的编辑还为读者中的那些撒旦崇拜者收入数列 157,192,218,220,222,224,226,243,245,…. 该数列是由包含兽数 666 在内的 2 的所有次幂.(如果你有耐心去计算 2^{222},其中就有 666)

《百科全书》乃是对我们数系无限多样性和复杂性的颂词. 许多数列在数论及相关的领域中起着重要的作用. 那些终生钻在数字堆里的人偶尔偷偷闲是无可厚非的. 在我没有引用过的数千个条目中,本书所展示的是,在某种意义上说,实数为探索者提供了肥沃的土壤. 一些数学家甚至开展了所谓的"实验数学"的运动,这是一个通过挖掘数列、识别模式与检验假设——通常用计算机——来作出新发现的领域.

一位常常被看作实验数学家而非理论数学家的人物是安德鲁·奥德莱斯科(Andrew Odlyzko). 他是美籍波兰人,2001 年以前在新泽西的 AT&T 实验室工作. 2000 年 6 月一个温暖的下午,奥德莱斯科坐在电脑屏幕前,向我展示了一列数,大约有 30 个,占了满满一屏幕. 这些数是由他办公楼地下室里的一组功能强大的联网电脑计算出来的结果,每个数精确到 12 位小数. 他

① 该序列中的每一个数为最小的 n 位素数. ——原注

又给我看了另一个更大的数列中的少数几个数. 整个数列共有15 000 000 000 000个数. 我在听奥德莱斯科说话、并欣赏他办公楼四周风景时,他的电脑正在马不停蹄地计算这些数中的另外十亿左右个数. 【111】

奥德莱斯科个头很高,近乎秃顶,圆溜溜的前额,无边框的眼镜. 他看上去不苟言笑、甚至超凡脱俗. 但当我走进他的办公室时,听到他正在为飞机票价给当地航空公司打电话,这才显得凡俗了些. 但数学家的形象确实会受到歪曲. 那些误认为数学家很像会计的人们认为他们整天在做运算. 那些对于他们真的在做什么了解得多一些的人们对于他们的精神生活能达到多抽象感到十分惊讶,我不知道他们是如何将日常生活中的俗事与这样一种稀有的存在调和在一起的.

在 AT&T 实验室,奥德莱斯科从事远程通讯系统问题的研究,但他实际上是一名数论家,整天考虑的是我们所用数系的性质. 很难向一个非数学家解释清楚这些数对一个数学家而言所具有的真实存在性. 我听过奥德莱斯科的一场关于素数的演讲. 在一小时时间里,他如数家珍,展示了一系列幻灯片,上有各种计算、引述、甚至卡通图片. 他就像在描述一次勘探和开垦一片陌生土地的经历一样. 奥德莱斯科是数学上的挖掘者之一,尽管在挖到宝藏时,获得荣誉和奖励的常常是那些在一块特定土地上肆意挥手的家伙们. 如果是奥德莱斯科找到了宝藏,那么他的发现将会让他的许多同事失望. 类似于阿兰·图灵,但手头拥有无限多更重要的方法,奥德莱斯科有朝一日或许能证明黎曼假设是错的——但永不能证明它是对的.

奥德莱斯科把一切注意力都放在黎曼假设的零点上. 他编了一个使 $\zeta(s)$ 等于 0 不断增大的 s 值的数表. 如果他找到不在临界线上的零点,那么他就能推翻黎曼假设.

对于斯蒂夫·戈内克(Steve Gonek)这样的数学家而言,这将是一个灾难. 他说,"如果有许多零点不在临界线上——或许

这样的零点的确存在——那么整幅画面实在是太可怕了，太可怕了，太丑陋了. 它就像奥卡姆[①](William Occam)剃刀一样，要么得到素数的绝对完美的表现，它们像你所希望的那样表现，要么得到确实很糟糕的表现.”

当然，人们真正想要了解的正是素数. 如果黎曼假设正确，那么零点和素数间就存在密切的联系，大多数人会感到若不理【112】解其中一个，就决不能理解另一个. 但这种联系并非显而易见. 例如，并非每个素数都对应一个零点. 萨缪尔·帕特森把零点与素数之间的关系比作整个乐队的声音与各种乐器单独演奏的声音之间的关系.

“数学上有个技术叫傅立叶变换，”他解释说，“一个最明显的例子就是声学，你把声音分解成不同的频率时，你就会感觉到声音压力的具体变化. 这发生在音乐上——当你演奏一种乐器时，它实际上是由不同频率的声音会合而成的.”

傅立叶(Joseph Fourier)于 1768 年出生于法国的奥塞尔(Auxerre)，他经历并支持法国大革命，是当地革命委员会的一名积极分子. 后来，他成为拿破仑远征埃及的科学顾问. 傅立叶设计了一种方法，将任何一种复杂的波形表示成一系列更简单的波的和. 最简单、最对称的波叫正弦曲线，由它可以形成其他任何波，如图 11 所示.



图 11 一种简单的波——正弦曲线，是构造物理学上更复杂的波的基础.

---

① 奥卡姆(1285? —1349?)，英国经院哲学家、逻辑学家，中世纪唯名论主要代表，方济格会修士，曾提出“奥卡姆剃刀”原则，反对教皇干预世俗政权，著有《逻辑大全》等. ——译者注

随着波峰(或波谷)之间距离的不同,有许多不同的正弦曲线,我们用“频率”来度量它.频率越高,波峰之间的距离就越近.傅立叶证明,任何复杂的曲线都可以分解成一系列正弦曲线.所以图12最上方的曲线可以通过它下面三个不同波长的正弦波“叠加”而成.把三列简单波在对应点处的值(即波峰的高度或波谷的深度)相加,即可得到复杂波上对应点处的值.

【113】

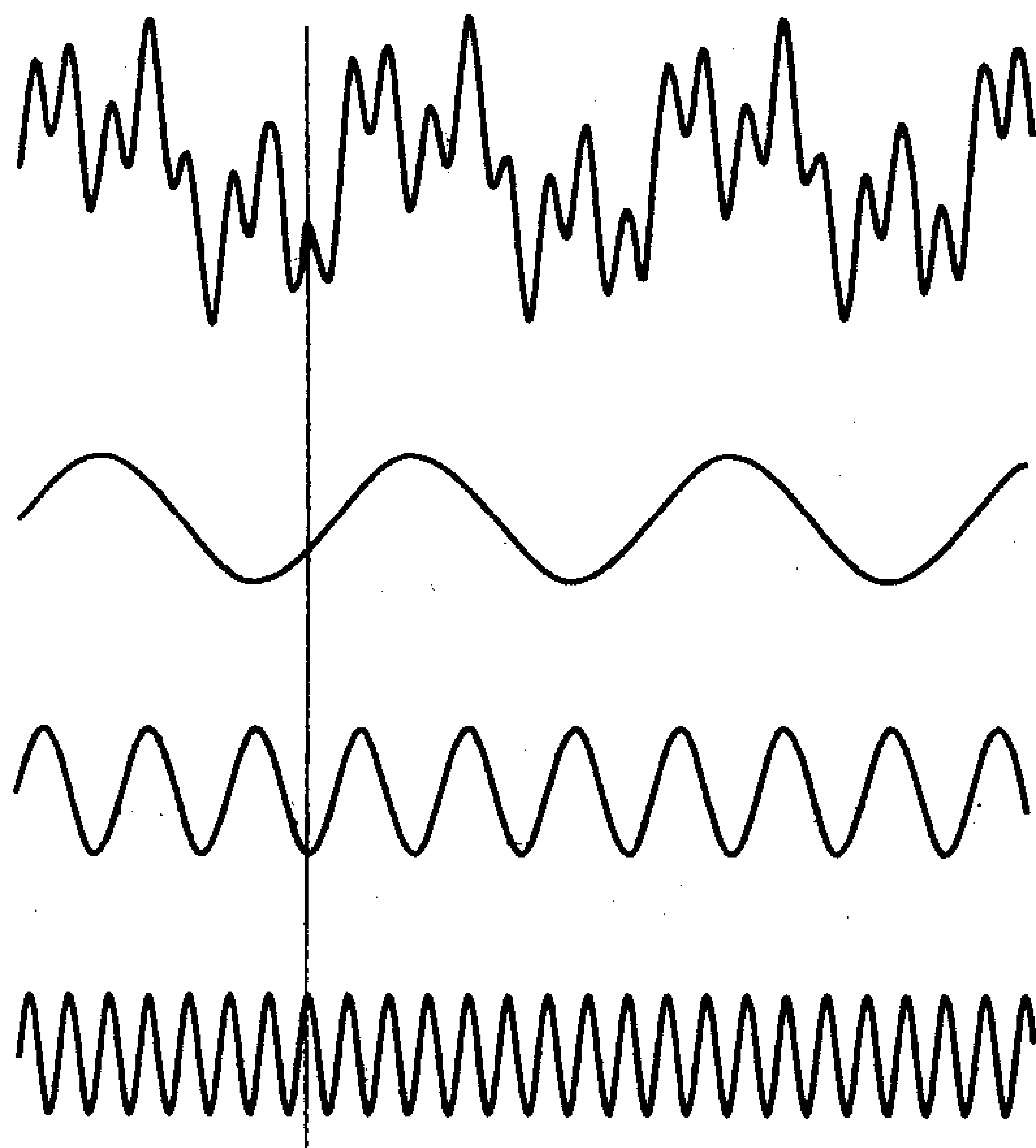


图12 最上方的复杂曲线上每一点是通过将下面三条正弦曲线上相应点的值相加得到的.

由于复杂波形在许多不同物理学分支(包括声学、光学和无线电学)中都起着重要作用,傅立叶分解波的技术成了数学物理中最重要的发现之一.

“有位数学史家,”萨缪尔·帕特森说,“名叫纽恩斯万德(Erwin Neuenschwander),他到处问人,谁是世界上最有名的数学家.如果你看看结果,很可能是傅立叶.黎曼 ζ 函数的零点

给出的正是素数集的傅立叶变换".

正如我们所看到的,素数分布大致遵循高斯的预测.但如果仔细考察素数分布,你将会发现,在某个区间内素数的个数通常比高斯的数目多或少.这些出入可以表示成弯曲的波形.如果对这个弯曲的波形进行一类傅立叶分析,那么它可以分解成一系列的波,每列波与黎曼 ζ 函数的一个零点相关.

【114】

素数曲线就像管弦乐队的声音,而零点就像是把该声音分解成不同的频率,使得每个零点对所有素数都产生作用或每个素数对所有零点都产生作用.如果你从管弦乐队演奏的音乐中去掉一个个单个纯音,音乐还在,不过听起来越来越稀疏但仍依稀可辨,直至最后一种纯音被去掉为止.

另一个类比也很管用.如果拿一张全息图仔细看,你会看到三维物体或它的背景,就好像透过孔看全息图的尺寸一样.现在,如果你把全息图剪成两半后再看,你看到的却不是原来场景的一半.你看到的依然是原来的整个场景,不过你得透过一个更小的"孔"去看. 再把全息图剪成两半, 你看到的依然是同样的场景. 在你意识到这有点像通过墙上的窗户向外看以前,你也许会感到很惊讶.如果封住半扇窗户,你依然可以看到外面的一切.

好,黎曼零点的整个集合就像是素数的全息图.如果能够"看遍"所有的零点,那么我们就会看到素数的精确图像,并能发现我们想要知道的一切.但由于我们只有一部分零点,永远不能得到无穷多个零点,因而我们所得到的素数图像并不足以完全解决我们的所有问题.那么,谁知道呢? 随着素数图像越来越精确,如果有一些零点不在我们所认为的位置——临界线上,那么我们会发现关于素数的详情根本就不像我们所期望的那样.这一发现源于安德鲁·奥德莱斯科的研究.

普林斯顿的彼得·萨纳克很奇怪地把奥德莱斯科的电脑说成机器."如果此事[黎曼假设]是错的,那么任何时候你都可以

让一台机器来推翻它.你得相信它是错的,才会让你的机器整日整夜地工作.奥德莱斯科正在考察第 10^{20} 个零点,或许,如果他继续找下去,他的机器会得出结果,证明黎曼假设是错误的.若在临界线之外存在一个零点,它事实上就推翻了黎曼假设.这当然会是个灾难,但它可能会发生."

由于 ζ 函数的复杂性以及进行大规模复数运算的难度,奥德莱斯科不得不使用一些技巧来寻找临界线上零点的位置,看是否有不在临界线上的零点. 【115】

为了弄清奥德莱斯科的计算机在做什么,有必要概述一下黎曼 ζ 函数的零点的真实含义. ζ 函数本身——形如 $1/n^s$ ($n=1,2,3,\cdots$)的项的和——随着代替 s 的不同复数而取不同的值.像查尔斯·梁维克的黄石间歇泉一样,如果你扔进某个 s,ζ 函数就会扔出一个 0,如果你扔进别的 s,则 ζ 函数会给出非零值,有的正,有的负.

奥德莱斯科使用了 ζ 函数的一种变换形式.可以证明,如果有不在临界线上的零点,那么它们对称地分布在临界线的两侧.有了奥德莱斯科的变形图,黎曼零点都集中在 0 轴上,而不是对称地位于 $\frac{1}{2}$ 线的两侧.这样,产生了一张将 ζ 函数值表示成一条弯曲线的图像.这条曲线与零轴的每一个交点都是 ζ 函数的零点.

因为我们只对曲线与 0 轴交点处——在这些点处函数值为 0——的 s 值感兴趣,所以我们无需设法画出整条曲线.这就需要我们计算 s 的每一个可能的值所对应的函数值.由于 s 可以取无限多个值,因此,上述计算是不可能的.但有个捷径,这是一个可以上溯到 100 年以前的方法,甚至黎曼本人也可能曾经使用过:找出图像由正变负或者由负变正的次数.每次出现这种情况时,曲线就与 0 线相交,因而函数值等于 0.

基于 1932 年西格尔所发现的黎曼的原始计算,奥德莱斯科设计了一种速度更快的方法.首先,他让 Cray 计算机利用原始的黎曼-西格尔方法找到 100 000 个零点,耗时 15 小时.接着,利

用新的方法，从 s 的一个更大的值开始，同一台计算机耗时 18 小时找到 16 000 000 个零点——只增加 20%的计算机时间就找到 60 倍多的零点. 新方法通过计算数轴上等长区间上 ζ 函数的符号变化次数来实现. 通过计算符号变化的次数，他们可以相当肯定，符号变化的次数等于 0 线上的零点数.

【116】

这个方法很有效. 它当然使奥德莱斯科所找到的黎曼 ζ 函数的零点数比世界上任何人找到的都要多. 它证实了数百万个零点的的确确位于临界线上. 但是，仅仅利用这个方法仍然无法证明临界线之外不存在零点——一种立即可以推翻黎曼假设的情况. 为此，还有另一种方法可用. 奥德莱斯科使用了一种方法来计算区间周围"盒子"里所有的零点. 如果有零点不在直线上，像图 13 中直线上方或下方的点(这样的点如果存在的话，将在直线两侧成对出现)那样，那么，利用"盒子"法将得到与"符号"法不同的总数. 如果用两种方法得出的结果相同，那么该区间上所有零点都位于临界线上，不存在隐藏在临界线外的零点.

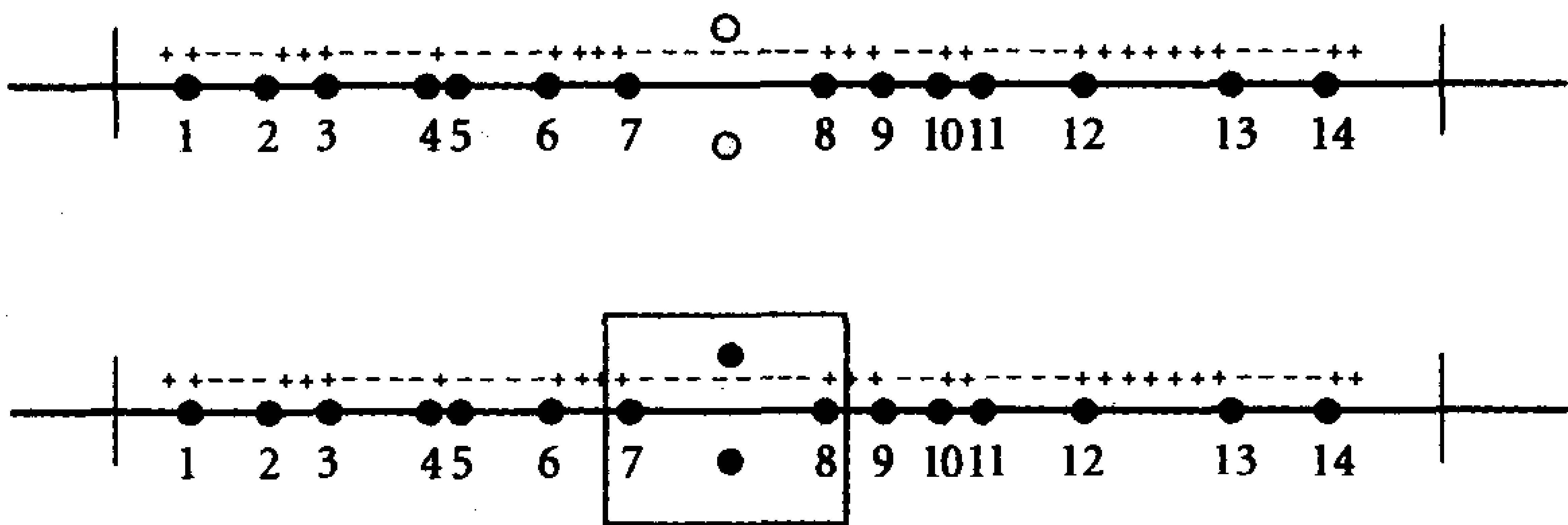
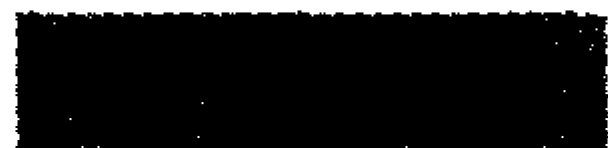


图 13 奥德莱斯科和其他人用来求黎曼零点的一种方法是计算黎曼 ζ 函数值由正变负的次数. 但该方法只能找出实部等于 $\frac{1}{2}$ 的零点 $\left(\frac{1}{2}+ib\right)$. 可能会有实部等于其他某数的零点，因此变号法并不能找出临界线外的零点，而这样的点如果存在，就推翻了黎曼假设. 故又用"盒子法"，利用该方法可以计算"盒子"里位于直线上或直线外的零点. 若用两种方法所得结果不同，则黎曼假设不成立.



当奥德莱斯科坐在办公室电脑前研究另外某个课题时，如果警报系统发现了差异，它就会发出警报．“该程序常常在一个特殊区域内打信号，指示这里可能有黎曼假设的一个反例．由于程序很愚笨，零点之中又有这么多的异常情况，我不得不用手进行检验，看发生了何种情况．不过，这种情况在每几百万个、每几千万个零点中并不经常发生，因此，我实际上并未对所有的那些零点都进行检验．我觉得我已经检验了五六十亿个零点，其余的仍有待于彻底检验．” 【117】

事实上，自第一次见到奥德莱斯科以来，他一直在做这样的检验工作．到目前为止，为了寻找反例，他已处理了第 10^{23} 个零点附近的所有 200 亿个零点．让那些相信黎曼假设正确的人忧心忡忡的是，2002 年夏有暗示说，一个反例可能就隐藏在附近．

很容易将奥德莱斯科的研究看作是列车的机车号码记录(train-spotting)——从数域中收集零散的样品，根据所含条目个数判断样品的价值．例如，他写了一篇题为“黎曼 ζ 函数的第 10^{20} 个零点及其 17 500 万个相邻点”的论文．这显然是一个极大的成功，之后他又写了题为“黎曼 ζ 函数的第 10^{22} 个零点”的续篇．(如果你有兴趣，第 10^{22} 个零点始于 1 370 919 909 931 308 226.490 240…)．但对彼得・萨纳克而言，奥德莱斯科对黎曼假设事业所作贡献要比计算零点个数大得多．

“他是个伟大的理论家，”萨纳克说，“他并不是个计算机迷，有许多重要的定理都以他的名字来命名．他的不同寻常之处在于，这样利用计算机进行研究的数学家并不多．如果高斯现在还活着，我敢说他会一天到晚坐在电脑前面．换言之，他不会去证明，而是会告诉你什么是对的，经过实验，说‘好了，现在我明白了’，然后继续下一件奥德莱斯科愿意去做的事．计算机可以发挥很大的作用．如果你有直觉，可对模式进行试验，然后建立理论，大问题便得到了解决．我认为纯数学也有实验的一面，数素数就是其中一例．”

计算机不仅仅是计算的工具，它在理论数学研究中正起着越来越重要的作用. 1977 年，曾困惑数学家 100 多年的四色定理最终通过计算机得到了证明. 该定理说的是，任何一张二维地图可以只着以 4 种颜色，其中具有公共边界的区域不能着相同的颜色. 一代又一代的数学家试图去证明它，其中一些人认为自己获得了成功. 阿尔弗雷德·凯普(Alfred kempe)就是其中的一位. 他于 1879 年发表了一个证明，但 11 年后被证明是错的. 但是，1976 年肯尼斯·阿倍尔(Kenneth Appel)和沃尔夫冈·哈肯(Wolfgarg Haken)改善了凯普的证明方法，计算得到平面上每一张地图都可以归为 1 500 种不同类型之一. 他们为电脑编了程序，证明对于每种类型，四色定理都成立. 计算机耗时 1 200个小时才完成最终的证明. 对于许多数学家而言，承认它是一个证明乃是一个极点：数学家不可能对计算机的四色定理证明中的每一个细节都作出检验. 现在，20 多年过去了，一个重要定理的第一次计算机证明已写入数学年鉴，被普遍接受. 但这并没有阻止数学家去寻找可由人类自己完成的更简单的证明.

【118】

计算机可以用来生成一个证明——在十分特殊的情况下——这一事实不应与“用计算机来验证假设而非证明”混为一谈. 这是人们普遍接受的方法，它至少给予人们寻求证明的自信心，有时通过提供反例来阻止他们继续作证明. 无论有多少正面的例子，都不能保证在某个角落不存在意外.

有一个关于素数分布的异乎寻常的故事很好地说明了这一点. 在本书的前面，我们已经遇到过高斯的猜测：小于 n 的素数(用 $\pi(n)$来表示)的个数近似等于 $n/\log n$. 对于这个近似值，有一个修正值，它使用了另一种对数，称为积分对数，记为“Li”. 高斯发现，$\pi(n)$ 比 $n/\log n$ 更接近 $\mathrm{Li}(n)$. 当数学家们用这个方法来计算对应于越来越大的 n 的 $\pi(n)$时，他们发现，尽管所得结果是迄今最佳的，但随着 n 的增大，$\pi(n)$与 $\mathrm{Li}(n)$之差也变得越来越大. 当 n 等于 10^5 时，$\mathrm{Li}(n)$ 比 $\pi(n)$ 大 38；当 n 等于 10^6 时，

Li(n)大 130；当 n 等于 10^9 时，Li(n)大 1 701；等等. 这就意味着 Li (n)总是比 $\pi(n)$大一些. 但是，李特伍德于 1914 年证明，n 取到某个值以后，上述大小关系开始改变，随着 n 的继续增大，Li(n)开始变得比 $\pi(n)$小. 不过，李特伍德的证明并未提供发生变化的 n 值的求法. 1933 年，一位名叫斯坦莱・斯古斯(Stanley Skewes)的数学家求得了 Li(n)开始小于 $\pi(n)$时的 n 的"上界". 这意味着他证明了对于某个小于他所求得的那个数的 n，Li(n)由大于 $\pi(n)$变成小于 $\pi(n)$. 斯古斯求得的数是 【119】

$$10^{10^{10^{34}}}$$

一位写大众数学书的作者麦尔柯尔姆・莱因斯(Malcolm Lines)这样写道：

> 这个巨大的数让人难以理解. 它被称为数学上能派上用场的最大的数. 数学上的数字总是大大超过其他科学中的数字. 例如，整个宇宙中的原子总数大约"只是"10^{75}. 这个数完整地写出来，即为 1 后面有 75 个零. 而上面那个巨大的数却有不少于$(10^{10})^{34}$个零. 这意味着，即使我们使用和宇宙中原子数一样多的零，也仍然不能完整写出这个巨大的数. 对于任何一位试图求出使素数个数第一次大于其理论估计值的 n 的人来说，这似乎不是个好兆头. 可以说，这个例子告诉我们，从区区几十个亿的数字信息中贸然下结论是多么的不明智.[83]

哈代以斯古斯的数为例，说明"真理不仅击败了所有事实和常识的证据，而且也击败了像高斯那样强的数学想像力"，他试图用人类所能使用的术语来表达这个数有多大. "宇宙中的质子数约为 10^{80} 个，"他写道. 国际象棋的可能局数更大，或许为$(10^{10})^{50}$. 如果整个宇宙是一张棋盘，质子为棋子，两个质子之

间位置的交换为一次移动，那么可能的棋局数大约就是斯古斯数."[84]

记住，这个数字只是上界，意思是说，在 Li(n)刚刚开始小于 $\pi(n)$的点不大于斯古斯的数. 但它可能更小. 多年来，其他数学家试图求出比斯古斯原来的估计值更小的上界. 20 世纪 60 【120】年代末，伯克利大学的勒曼(R. Sherman Lehman)利用另一种方法将上界减小到 10^{1130}. 20 世纪 90 年代，这个数又被里尔(Herman te Riele)减小到 10^{370} 或 10^{380}，最近它又被胡德逊(Hudson)和贝叶斯(Bayes)减小到 10^{310}左右. 同时，数学家通过从小到大依次计算，得到 10^{12} 以下并无反例存在. 所以问题的精确结果大约在 10^{12} 和 10^{310}，即带有 12 个 0 的数和带有 310 个 0 的数之间的某处.

反思斯古斯原上界的神秘性，李特伍德问：一个数学问题是否有某个答案，人们可以证明它是存在的，但又因太大而难以言表. 李特伍德所说的"言表"是指一个数太大，不可能写下来或不可能以任何传统的方式说明它的大小. 结果真有这样一个数，它由数学家格雷哈姆(Ronald J. Graham)发现. 格雷哈姆在解决英国数学家拉姆西(Frank Ramsey)所提出的问题时得到了另一个上界(拉姆西于 1930 年英年早逝，年仅 26 岁. 那时，他在数学、哲学和经济学方面都已经取得重要成果).

在拉姆西的诸多意义深远的成就中，有一项是成为拉姆西理论的数理逻辑的一个分支. 它研究的是诸如求最少的人数，其中至少有两人是相同性别的. 这个问题并不太难. 另一个问题可用拉姆西理论来证明，它说的是，在任一 6 人集合中，要么有 3 人彼此认识，要么有 3 人彼此不认识. 导致格雷哈姆大数的拉姆西问题如下：

> 取任意多个人，列出他们可以组成的每一个委员会，考虑每一对可能的委员会. 问：有多少人必须呆在

原来的小组中，使得无论如何分配，总会有四个委员会，其中的所有对都落入同一小组，并且所有的人都属于偶数个委员会？

格雷哈姆求得一个上界——我们称之为U——他证明了满足拉姆西条件的原小组中的人数不可能大于U. 但U很大，不能用通常的数学记号写出来. 这足以说明：如果我说斯古斯数与格雷哈姆数之比等于一个原子与整个宇宙之比，那么我就无法到达真理了. 为了结束整个故事，今天研究拉姆西理论的大多数专家都相信正确的答案是6. 【121】

奥德莱斯科的黎曼零点工作产生了类似的大数问题. 当他探索越来越大的零点时，他遇到不在临界线上的零点的可能性是否增大呢？亚历山大·伊维克是一位塞尔维亚数学家，他作出了好几项重要的数论证明. 他认为这样的零点可能会存在，但这无法通过现实的计算能力来解决. 世界上现在没有，将来也永远不可能有足够的计算能力把它求出来.

他说话直率，发出r的舌尖颤音；谈起这个让他内心感到十分亲切的主题时，他慷慨陈词："现在，尽管有这个可能性，压倒一切的支持黎曼假设的证据——即15亿个零点满足黎曼假设，再加上其他更高的零点——也有一个弊端. 在目前的计算机条件下，数值计算不可能走得太远. 如果目前的计算机水平继续保持20年、30年、或许50年，那么你所能期望的只能是考虑高达10^{40}的零点. 现在，对我们这些凡人而言，这当然是个巨大无比的数，但当你考虑到涉及ζ函数的公式中有叠对数时，它就不是一个大数了."

"叠对数"是对数的对数，随着x的增大，它的叠对数值十分缓慢地增大. 如果你考虑10^{40}，它的常用对数为40. 对数的对数为1.6. 这意味着，当x越来越大时，其对数的对数变化速度要缓慢得多. 当x从10^{40}增大到$10^{1\,000}$时，其对数的对数却只从1.6

增至 3. 伊维克继续描述这种“线外”零点可能出现的区域如何决定于叠对数的缓慢增大，位于离零线之最远处.

“因此，为了一切实用目的，黎曼 ζ 函数在数值研究所能达到的范围内并未显示出庐山真面目. 你应该把数字提高到 10^{10000}，那么我会更加确信事情是否仍然强烈指向黎曼假设的【122】方向. 因此，数值计算当然令人印象深刻，这是计算机与数值分析的胜利，但它们的能力有限. 黎曼假设是一个十分棘手的结构，它对一切现存的零点都成立，但我们却不能从数值上验证对无穷多个零点都成立. 因此，必须寻找别的理论研究方法，目前，它们还不足以得出肯定的结论.”

奥德莱斯科对黎曼假设是否正确持中立态度. “颇有一些人不愿意相信它成立. 据说李特伍德至死也不相信它. 就个人而言，我也并不绝对相信它是正确的. 但我深信，如果存在反例，那么它就在我的研究范围之外了.”

所以，如果奥德莱斯科不是真的致力于证明或者推翻黎曼假设，那么他对零点的详尽分析到底有何益处呢？为什么会有这么多的数学家这么高地评价他的工作呢？米歇尔·贝利就是其中一位.

“他开始做这些史诗般的精彩计算，”贝利热情洋溢地说，“他获得了漂亮的结果.”但贝利的激动来自于从奥德莱斯科的计算中获得的一系列发现. 这些发现本身如果不能证明黎曼假设，那么它们也可能将证明方法交到贝利和他的同事们的手中. 这是一个始于 1972 年普林斯顿茶话会的故事中的一段最新【123】插曲.

9. 普林斯顿茶话会

这是高斯单位总体中随机矩阵特征值对相关的密度.

——弗里曼·迪森致修·蒙哥马利

从世界范围来看,数学——并且实际上一般的科学也如此——常常被看成是一种合作性的事业.大多数的进展都是通过对许多不同知识片段进行辛勤整合而取得的,并且那些不同的知识片段极少来自同一个头脑.总的来说,个人数学家共享成果比隐藏成果获益更多.1972 年,修·蒙哥马利访问普林斯顿,他在茶话会上被介绍给博学的科学家和数学家弗里曼·迪森.当迪森问他在研究什么时,他回答得十分坦诚.他的回答让迪森产生了共鸣,迪森随后向他提供了一个信息,这个信息间接地导致了今天被许多人看作最有希望证明黎曼假设的方法.

普林斯顿大学校园里的高等研究院是爱因斯坦成为世界上最著名的科学家后安享晚年的地方.事实上,有一本关于高等研究院的书即以来访者经常问的问题为名:《谁得到了爱因斯坦的办公室?》爱因斯坦的办公室是一间很宽敞的、带有高高的凸窗的房间,窗外是绿色的草坪.当日本游客关门离去后,得到这间办公室的人对它所产生的魅力颇感厌烦.

在研究院的数学系,我们可以找到无拘无束的数学化的最纯粹的例子.走廊两边是窗明几净、令人心旷神怡的办公室,每

间办公室里有一块黑板，一张桌子和一位数学家. 数学家们在做三件事中的一件——或凝视窗外、或奋笔疾书，或用粉笔在黑板【124】上涂鸦. 这就是他们受资助去做的工作，而且他们看起来都做得非常出色. 我想，这也是任何一所大学的文学系或历史系里所发生的事. 但有一个差别——总的说来，历史学家，文学评论家，甚至是作家，他们都在重复利用材料；他们当然会加入自己的见解，但从本质上说，他们都是在重复利用着已经以某种形式存在了的事实、文字、情感、描述. 但数学家是个创新者. 重新考虑过去的定理证明，很少能得到乐趣或收益，寻找同一定理的新证法所得乐趣或收益也不会多多少. 但是，发现数与数之间的新关系，探索新的或只是部分被分析过的函数，解决棘手的、令人泄气的难题——这一切都能导致以前人们从未遇到过的新概念的诞生.

除爱因斯坦外，极少有著名的现代数学家，其成就能为公众所熟知. 怀尔斯是极少数者之一. 怀尔斯目前在高等研究院工作，他于 1995 年证明了费马大定理，当时他 44 岁. 该定理最初是 17 世纪法国数学家费马提出来的，他声称自己已经对其作出证明，但从未发表①. 怀尔斯证明费马定理的故事引发了广泛的媒体报道，包括一部电视记录篇和至少两本畅销书. 如果黎曼假设能被证明，它可能会吸引多得多的新闻报道.

2000 年 11 月，当彼得·萨纳克和我穿过高等研究院的草坪去吃中饭时，我们邂逅了怀尔斯(现在已是安德鲁爵士). 他平静、羞怯、守口如瓶. 对他来说，荣誉似乎并没有激励、反而约束了他未来的研究. 你无法想像这么一个不愿意或不能够满足如饥似渴的媒体以及对他着迷——但并不理解——的非数学家们要求的人物.

彼得·萨纳克是怀尔斯在他攻克费马大定理的后期一直保

---

① 费马说(但没有证明)，当 $n>2$ 时，$x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解. ——原注

持联系的少数数学家之一.

“他来我家时告诉我的第一件事情,”萨纳克说,“是‘我觉得我已经证明了费马大定理’,我说,‘哦,是吗?我觉得我也已经证明了黎曼假设’.我在和他开玩笑.接着他只是说,‘好,让我告诉你一个思想.’十分钟后,我动弹不得.显然,这是一个重要思想,是一个重要突破,即使是它不起什么作用.对于黎曼假设,我还没有看到过这种思想.我们将知道何时出现这类东西,因为很明显,这个家伙已经有了某个全新的思想.”

【125】

我们在一起吃中饭时,萨纳克和怀尔斯讨论起最近在曼哈顿上演的一部音乐剧.

“不可思议,他们怎么会把志村-谷山写进其中一首歌的,”萨纳克说.

“我没看到,”怀尔斯说.“很显然,他们让一个妇女扮演我妻子,尽管他们从未见过她.”这似乎不太可能,但这部名叫《费马的最后探戈》的音乐剧是一位作曲家和一位作家写的,他们在看过电视记录片、读过畅销书后,觉得怀尔斯的故事是个戏剧素材.

那天晚上,我坐在剧院里,张大嘴巴看着七名演员的演唱,我做梦都不曾想到,在并非专业人士的观众面前,他们在舞台上竟能唱出这样的歌词!从观众对一些歌曲和笑话的反应来判断,他们的数学水平参差不齐——从一无所知到十分高级,各层次都有.“怀尔斯”唱道:

我知道,我发誓,
x平方加y平方,
恰恰等于z平方.
这个对称多漂亮,
当n等于3以上,
同样的对称不再现.

在某个时间,“费马”出现了,他看到怀尔斯的证明使用了17世纪数学家们所没有的数学工具,对其嗤之以鼻.“费马”唱道:

说什么椭圆曲线、模形式,
说什么志村-谷山,
一切都是捏造,乌有子虚.
它不过是一部代数传奇剧!

在怀尔斯对费马大定理的证明中,有一个错误怀尔斯在宣布他的证明之前并没有发现.在音乐剧里,“费马”指出了怀尔斯的【126】错误,这或许是一名演员在一般观众面前所说出的最难理解的:

“为了把你的椭圆曲线变换成伽罗瓦表示,使得它们不利于模形式集,你假设它们满足欧拉系的要求,而事实上它们并不满足!”

音乐剧里最奇怪部分乃是扮演怀尔斯的演员的表演.为了避免传统的英雄人物形象,而塑造出低调的现实生活中的数学家形象,导演设法得到了丹尼尔·济恩(Daniel Keane)对怀尔斯的准确刻画,这使他的数学成就更大了.休闲的衣服,羞怯的步态,低调的演讲,专心致志的研究——演员看上去酷似那天在中饭时我所遇到的那人.把英雄刻画成一个讨厌鬼,会把他贬成一则笑柄.但在这儿,在某种程度上,怀尔斯这个人物通过他的成就而得到提升.

该音乐剧的作者试图抓住数学事业的本质,看出怀尔斯研究费马大定理的事件同样多地体现了任何传统电影或戏剧的情节所体现的那种激情、挫折和成功.如果这对费马大定理成立,那么它对黎曼假设也同样成立.以保密问题为例.由于怀尔斯的巨大成就,一些数学家觉得他们自己的职业生命受到了摧残,因为怀尔斯对他自己的研究成果守口如瓶、秘而不宣.

“怀尔斯为他的研究保密了整整7年时间,”乔治亚大学的

一位英国数学家安德鲁·格兰韦尔说，"这是有原因的. 如果他泄漏他做的某些工作，专家们就会从中受到启发，因此，如果他说，'好，我已做出来了，'于是一些顶尖的专家就会说，'等一等，如果你能展开这个，这个和这个，'而那正是安德鲁的计划，'那么我们就证明了费马大定理.'我认识一些人，他们真的感觉到，如果他(怀尔斯)不把自己关在阁楼里，而是把自己所知道的透露出来，那么他们至少会进行好的尝试. 所以一些人得知他整整7年对他的研究守口如瓶时几乎都要发疯了，另一些人正在研究同样的问题却一无所获. 而这家伙知道这一切."

当然，期望一位能完成世纪之证——或其中之一——的数学家能够让他的同行们及时了解他的最新进展，这也许是不合理的. 但在数学这样的学科里，分享成果实际上比你所想像的、比诸如药物研究或微电子学中的成果分享更合情合理. 数学上并没有立竿见影的经济回报——至少费马大定理没有——科学和数学在传统上一直是个开放的学科，一个领域里每一个新的结果一经证实，就应该发表出来，以便别的科学家或数学家能从中获益. 怀尔斯不想这样做，给处于相似轨道上但落后于他的数学家造成了可以理解的痛苦. 【127】

"他们在怀尔斯已经知道的事情上浪费了很多时间，"格兰韦尔说. "我觉得他们不会对他很生气. 他们会理解他为什么这么做，但他们同时也觉得，当他已经知道如何比他们所梦想的还要做得好时，自己浪费了时间. 这使得其他人感到很不安. 我们希望研究者进行更好的合作."

和黎曼假设一样，一些数学家以毕生精力研究费马大定理，直至梦系魂牵的地步，挪威著名数论家塞尔伯格，现已八十多岁高龄，亲眼目睹了几代数学家在一些特定难题上的痛苦的失败. 实际上，塞尔伯格的许多同事都相信，他十几岁时第一次读到黎曼假设后，认真研究了整整60年，迄今仍孜孜以求.

"我是在一个拥有很多数学书籍的家庭里长大的，"他说，



“家父的图书馆里藏有黎曼文集，因此我有机会研读他的论文．我父亲获得过数学学位，但并不在学术机构工作——他有一份完全不同的事业．实际上他较晚才开始研究数学，由于他的住处离任何大小的图书馆从来都不近，所以决定自己建一个图书馆．那时我们并没有拉马努金的论文，但我的一个兄弟假期里带了一本回家．他是从大学里借来的．后来家父给我买了一本，至今我还保留着这本书．拉马努金的文集给我留下了十分深刻的印象．可以说，那是我研究的开端．我早期的论文都是受它的启发【128】写成的．大约 18 岁时我写了第一篇论文，题目是‘论某些算术恒等式’．”

塞尔伯格于 1940 年开始研究黎曼假设，对素数理论作出了十分重要的贡献．但他从未在公开场合说过他已经离证明相距不远了．

“你知道，我从未有过自己能证明它的想法．我总是有能证明其他一些定理的思想以及能证明某个部分结果的思想，但迄今我从未曾看到什么方法．实际上，我觉得只有极少数优秀数学家才会有他们认为可以完成证明的思想”．

但当我问他是否仍在寻找这种“思想”时，他实际上并未否认．“我必须跟随目前的研究．我现在并非真的期望自己能……”，他犹豫了一下，换了另一个话题．“你知道，随着年龄的增长，你有经验丰富的优势，你知道的东西多，在你的经验中还有许多东西没有发表．所以你拥有他人所没有的背景．但毫无疑问，大的突破往往由年轻人取得，年轻人也往往更有创造性的思想．你年纪越大，你就越依赖于你的经验，你的过去……”

他想了一会儿，然后，为防止我把他刚才的话解释成他垂垂老矣，他加了一句：“我的头脑现在仍然很敏锐”．塞尔伯格思考黎曼假设的时间或许比世上其他任何人都要多，但也有一段时间里他转向别的问题．

“你不能把所有的时间都花在像黎曼假设这样的难题上．有

些人年轻时致力于费马问题的研究.我认为这往往毁掉了一个可能更有前途的数学事业.有一位美国数学家名叫凡蒂弗尔(Harry Vandiver),他年轻时极有天赋,他迷上费马大定理,花费了一生的时间.当然,他也确实得到了一些结果,但总是与原问题大同小异,只是稍微作了一点点改进,对你能够证明不可能的情形中的指数增大一次而已,根本没有得到解决整个问题的方法.其解法自然来自与问题无关的一面."

但塞尔伯格并没有像格兰韦尔那样对怀尔斯的守口如瓶表示不满——原因或许是,塞尔伯格自己的同事们也同样认为他对自己的黎曼假设研究守口如瓶. 【129】

"如果你在从事某方面研究,却不知道是否会成功,那么我觉得这就可以了.在你想要公布你的研究成果之前,你没有义务让他人知道.每当研究数学问题时,都有可能一无所获.你可能不会成功,或者别的人也在研究同一个问题,并且在你之前取得成功.总是有风险.从某种意义上说,问题越大,风险也就越大.在这一点上,我一点也不觉得怀尔斯守口如瓶有什么错.一些人在研究某个问题时,常常会和一些同事或朋友谈起他的研究;而另一些人仅仅因为问题广为人知而保密,不想让别人知道他们在试图解决这个问题."

亨利克·艾瓦尼克是另一位被认为能证明黎曼假设的数学家.他也认为,对自己的研究结果保密并没有什么错."我敢说,任何一个有重要思想的人都将保持沉默",说着,他俏皮地笑了."我觉得,当你在会上听人谈论,那就意味着,要么所谈结果是不成熟的,要么已被理解得很好了,不用保密了.合作是件好事,但涉及到最好的工作时,工作太好了,就不能分享了."

然而,对于查尔斯·梁维克来说,合作有时是做好数学的唯一方法."你需要周围的人.有一次,我和一个小伙子交谈,我问他:'假设你是地球上最后一个人,你还会去研究黎曼假设吗?'你知道,我们的回答都是否定的.对此还有个有意思的问法:如

果你是唯一一个留下的,现在你该做什么呢?关灯?关门?研究黎曼假设?都没那么重要,我觉得我需要别的数学家在旁边."

"但如果你是地球上最后五个人之一,而他们都是数学家,你会做什么呢?"我问.

"有五人或十人的话,我就会去研究黎曼假设."他回答.

对一些数学家来说,发现的优先权问题——特别是唯一发现者的荣誉——是一个十分敏感的问题.塞尔伯格卷入了一场有关素数定理的风波,在同行中产生很坏的影响.加的夫大学的马丁·赫胥黎把它描述成"一场恐怖的混乱".故事涉及爱尔多斯,一个行为古怪的匈牙利数学家.爱尔多斯曾令人难忘地把【130】数学家定义为"把咖啡变成定理的机器".爱尔多斯传记的作者保罗·霍夫曼(Paul Hoffman)这样描述塞尔伯格-爱尔多斯之争:

> 1896年素数定理的证明[由哈达玛和瓦莱·普桑各自独立给出]靠的是重重的机器.最聪明的数学家都相信,这个定理用其他方法是不能证明的.爱尔多斯和当时名不见经传的同行塞尔伯格给出的"初等"证明震惊了数学界.据爱尔多斯的朋友们的回忆,他们俩同意在一本顶级杂志上连续发表论文,介绍各自对证明所作的贡献.随后,爱尔多斯给数学家们寄去明信片,告诉他们说,他与塞尔伯格已经攻克了素数定理.塞尔伯格显然邂逅了一位他以前不认识的、收到过爱尔多斯明信片的数学家.那位数学家立即问:"你听说了吗?爱尔多斯和那个谁已经给出素数定理的初等证明了."据说,塞尔伯格大受委屈,他抢先一步,抛开爱尔多斯,把论文发表了,因此独占了证明的荣誉.1950年,塞尔伯格主要因为素数定理的证明,独自被授予数学上的

诺贝尔奖——菲尔兹奖.[85]

“最仁慈的解释是，”马丁·赫胥黎说，“这并非谁的过错，塞尔伯格在研究素数定理时，佯装自己并不在作研究，试图作更深入的研究.或许爱尔多斯已经了解到塞尔伯格的研究深度.塞尔伯格得到了这个形式十分有趣的公式，但他相当确信，公式尚属中间的一步，他要做出更精确的结果.于是，要么塞尔伯格把它告诉给了爱尔多斯，要么爱尔多斯从第三者那里了解到它——用第三者来解释，将尽可能少地伤害两人中的任何一个.也许塞尔伯格为自己这样解释：‘我得到了这个公式，但我觉得它并没有什么用处.’试图引开爱尔多斯的注意，他并没有意识到，爱尔多斯会将这一点解释为自己可以完全自由地作研究.无论如何，爱尔多斯很可能已经对素数定理进行研究了.”

塞尔伯格是今天还健在的数论家中的一位巨匠.他研究过许多经典问题，为该领域贡献了重要的证明和技术.在他长期的数学生涯中，做出过许多以他的名字命名的成果，其中有塞尔伯格迹公式和塞尔伯格筛.事实上，修·蒙哥马利去普林斯顿主要是为了向塞尔伯格请教，因而在如今已经广为人知的茶话会上认识了弗里曼·迪森. 【131】

蒙哥马利一直在从事黎曼 ζ 函数零点在临界线上分布的分析工作.奥德莱斯科在一篇关于蒙哥马利工作的论文中写道：

> 对零点精确分布的研究相对较少.缺少这方面研究的主要原因无疑是数学家感到，如果黎曼假设本身不能被证明，那么研究比黎曼假设还要难的问题就很少有什么收获了.[86]

然而，蒙哥马利的的确确在做这项研究，并且因为论证之故，他假设黎曼假设是成立的.“从哲学上讲，我坚信可以尝试在人们能作出证明的范围之外形成猜想，”他告诉我说，“因为我的感觉是，你对超出人们的证明范围之外的图景懂得越多，你对于应该

如何证明更朴素的事情就会有更好的想法."

通过考察长长的零点表，蒙哥马利算出了两个零点的平均间距，他发现，小间距出现的频率很高. 他提出了一种函数，用以描述所谓的"对相关"(pair correlation). 该函数说，如果我们分析零点之间的距离，则每对零点之间的差遵循一种特殊的法则. (如果你有兴趣，该法则由公式 $1-\left(\frac{\sin\pi\mu}{\pi\mu}\right)^2$ 给出.)

米歇尔·贝利很长时间后发现自己的工作可由蒙哥马利思想的变换而得. 他这样描述该函数的意义：

"他能够奇迹般地看清素数间的某种运算，并加以分析. 他意识到这是十分有趣的. 他考察了零点对的分布，发现了一个初等分布函数. 最重要的是，他很快意识到，如果零点分布是随机的，那么你所得的答案就不是这个函数了. 通常，数学上的哲学是，你的研究对象要么是很结构化的，要么是随机出现的. 问题的核心是证明它们的表现的确像随机对象，如果它们是随机的，那么结构就不存在了. 所以，我们喜欢这样想：它们要么是结构化的(能为我们所理解)，要么是随机的. 有了数值计算所得的零点，你就可以作一些统计分析，看它们是否随机数. 没有人真正考察过这类问题，但蒙哥马利的分析计算证明了它们不可能是随机数，这很有趣，但他不知道它们究竟是什么."

【132】

奥德莱斯科继续用他算出来的数十亿个零点之中的一部分来检验蒙哥马利的猜想. 他描述了蒙哥马利对相关猜想的意义.

"他的基于黎曼假设成立所得结果表明，零点的分布并非完全随机. 它们不会像随机数那样，随机分布在一条直线上，没有什么特殊性质. 事实上，它们有着特殊的分布规律，特别是零点之间会互相排斥，严格分开. 偶尔，某些零点之间相距很近，但结果是，平均来说，它们并不十分靠近. 例如，如果考察前十亿个零点，如果这些点随机分布在一个区间上，那么它们之中两点之间

的距离不大于十亿分之一.而事实上,你所求得的最小距离约为千分之一——约为随机情形中的距离的三次方根.因此,这给出了零点之间如何相互排斥的一个度量."

在这一点上,奥德莱斯科很明显受到了零点与物体之间类比的吸引.他所指的并非物理意义上的"互相排斥",因为在复变函数零点这样的抽象概念之间,"力"是不起作用的.但它生动地描述了这样的事实:零点之间的距离一般要大于它们随机分布时的距离.

蒙哥马利对他的发现很感兴趣,但他拿不准这是否属于原创.因此,他决定赶紧去高等研究院.

"1970—1971年,我已作为访问学者,在高等研究院呆了一年,并认识了塞尔伯格.所以我坐车直奔普林斯顿,主要是为了就这些结果向塞尔伯格请教,因为那个时候,当一个人证明了某个结果时,他绝不知道该结果是不是新的,塞尔伯格会不会说:'是的,它已经在我桌子上放了好几年了.'所以在塞尔伯格说他以前未曾见过之前,我真的不敢保证这是不是一个新进展."

蒙哥马利对这段回忆笑了笑."我还见到了人群中的弗里曼·迪森,但我不知道,他是否有一点点知道我是谁,从哪里来,研究什么,甚至是否知道我是一个数学家.对他来说,我只是人群中的一张新面孔,所以我又回到普林斯顿呆了两天,在福尔德(Fuld)厅喝午茶,到处逛逛." 【133】

那天下午,一起喝茶的人中有一位是印度著名数论家萨瓦·达曼·周拉(Sarva Daman Chowla)教授,他的工作建立在拉马努金50年前所奠定的基础之上.

"周拉实际上与塞尔伯格合写过论文,"蒙哥马利说,"这证明了他的专一不二,因为塞尔伯格从不与他人合写论文.他唯一的一篇合作论文就是与周拉合作完成的.周拉的意志坚定不移,为实现不可动摇的目标,他有着不可抗拒的力量,正是这种力量

征服了塞尔伯格.周拉一旦进入某种状态,便真的不可阻挡.”

正是周拉的执着导致了下一步.尽管蒙哥马利是个年轻的研究者,并没有特定的理由去接近弗里曼·迪森这样的名人,但周拉认为是个好注意.

“他说,‘你见过迪森吗?’我回答说,‘没有.’他又说,‘我带你去认识迪森.’我说:‘不,不,我无需认识迪森.’来回推却几次后,最终周拉拉着我穿过屋子.我真的不想去打扰迪森.我觉得自己没有任何有价值的事情要和他说,但是,当周拉介绍我时,迪森十分热情,他问我研究什么,我告诉他,我在考察 ζ 函数的零点.”

当蒙哥马利说到他发现的零点分布公式时,迪森的耳朵都竖了起来.在提到 $1-\left(\frac{\sin\pi\mu}{\pi\mu}\right)^2$ 时,迪森说:“哦,那是高斯单位总体随机矩阵特征值的对相关的密度.”

“我以前从未听说过这些术语,”蒙哥马利继续说.“我不能准确理解他的话,因为之后我听到很多次这些术语,但他说‘对相关’以及类似于‘随机矩阵’的东西……”

迪森所看到的是两个表面上毫无关系的知识领域——量子力学和数论——之间的关系.物理学家在寻找刻画原子特征的方式时所提出的一个公式恰好与蒙哥马利对黎曼 ζ 函数零点的描述十分相似.

【134】

彼得·萨纳克去普林斯顿高等研究院工作要晚得多,那时,蒙哥马利和迪森的会面已成为数学上的一段佳话.即使是他所听到的或回忆起的细节与蒙哥马利的叙述不一致,但很明显,对他以及该领域的其他人来说,这件事几乎具有神秘的意义.

“1973 年,远远比我早,蒙哥马利在高等研究院演讲,很可能有三个人来听演讲,或许是邦比艾里和塞尔伯格,以及几个有点兴趣的人.但在茶话会上,他被介绍给了弗里曼·迪森,迪森对他说:‘年轻人,你讲 ζ 函数的零点——我没能来听,或许你能

跟我说说你所讲的内容.'[蒙哥马利]开始介绍说,他考察了某个范围内零点对的分布.迪森问:'你得到这个结果了吗?'我所听到的大概是这样——或许有些出入——迪森把结果告诉他,小伙子说:'是的,为什么?'他说,'因为我刚刚在做某种对称情形下哈密尔顿随机能量级理论中的计算'.当我许多年后再次听到这些话时,对我来说,这是一件鼓舞人心的事,因为这绝非偶然发生.所以,为什么出现这种情况乃是一个谜."

这种看似毫无关系的两种数学知识之间的偶然联系在数学上是常常发生的,并且通常富有成效.有个关于新西兰人法恩·琼斯(Vaughn Jones)的故事.他正在研究"无限维分析"领域中的一个问题.部分结果涉及到所谓的"辫群",这种群可用成结的或不成结的辫或绳来表示.一天,在纽约举行的一个会上,法恩·琼斯遇到拓扑学家琼·比尔曼(Joan Birman).

法国数学家阿兰·康尼斯描述了接下来发生的事情:"与比尔曼交谈时,他了解到辫群在'结'理论中也有用,由于马尔科夫的定理,拓扑学家正在寻找该群上满足某种性质的函数.'我有!'他叫道.'我口袋就有!'"[87]

对蒙哥马利来说,迪森的话首先暗示:他本可以发现比零点分布具有更广阔意义的东西. 【135】

"我很高兴,因为这里是关于零点间差异的猜想,以前对此根本没有猜想——没有推测,什么也没有.我们有理由相信,这真的是事物的表现方式,但这似乎与其他任何事物毫不相干.看来,应该对缺少的东西作些解释.这对我是很重要的,因为它为我提供了那个解释."

我问蒙哥马利,他是否对迪森所提到的随机矩阵研究到那样的高度."我从未见过随机矩阵,"他说."我几乎没有见过一个."而且,对弗里曼·迪森来说,这次喝茶时间里的交流似乎只是他暂时抛开自己完全不同的研究方向所经历的短暂消遣而已.

"就我所知,"蒙哥马利说,"在这五分钟的交谈之后,他就把

它抛到脑后去了.从那以后,我再也没有和他交谈过,所以我一生中只和他谈过一次.但这是一次很有成果的谈话.幸运的是,它的发生适逢其时,因为我已经有了这个结果,所需要的就是联系,而他提供了这种联系.但它并没有改变数学,而是改变了我们对数学与什么相联系的理解.我觉得,到现在,别的某个人已经看到了这种联系……那是近 30 年前的事了.从发表的观点来看,这当然是瞬间的事.我懂数学,一旦我懂数学,指出这种联系就不过是几个月的事情罢了."

从那次谈话后,对黎曼假设的证明有了全新的方法,量子宇宙有可能以某种重要的方式来表现,仿佛受黎曼 ζ 函数零点位置的驱使一样.

【136】

10. 一 位 狂 人

一位数学家的名气取决于他给出的坏证明的多少.

——贝思科维奇(A. S. Besicovitch)[88]

2000 年 8 月的某一天,路易斯·德·布兰奇在距巴黎约 50 公里远的吉夫维特(Gif-sur-Yvette)小站上等火车.一边坐等,一边想着黎曼假设的证明.

“那是个启发灵感的时间,似乎思路很协调.事实上,关键是 ν 函数的一种理论,这让我又回到了中学时代,那是一个美妙的延续.所以 ν 函数理论就是答案.对此我已有了做法:做一些计算,我相信有充足的时间坐着把它算出来,答案就在那里.”

如果这果真是德·布兰奇证明黎曼假设的关键时刻,那么,他在吉夫维特站台上所花的时间将标志着法国公交系统对数学史的第二次重大贡献.第一次贡献是法国数学家庞加莱在 1913 年的一次著名演讲中报道的.他描述了自己是如何度过好几个不眠之夜去证明所谓的富克斯函数的不存在性:

就在此时,我离开了当时的居住地冈(Caen),去参加由矿业学校(School of Mines)组织的地质考察.旅途的改变使我忘却了自己的数学研究.抵达库坦斯(Coutances)后,我们坐上一辆公共汽车去某个地方.

正在我上车的时候，一个想法突然出现了——在我以前的研究中，似乎没有任何东西能启发这种想法——我所用来定义富克斯函数的变换与非欧几何的变换是等价的．我没有验证这种想法；我本不该有空，因为，在【137】车上坐下来时，我接着和别人聊天，但我对这个想法确信无疑．在我回冈的途中，为了良心上过得去，我抽空证明了这个结果．[89]

我发现，这样的瞬间尽管不多，但也绝非罕见．本桥就在一家书店里经历过“庞加莱时刻”．

“七年来，我一直在考虑用某个算子来表示黎曼 ζ 函数的可能性，但未能成功．我住在东京市中心，时常光顾一家旧书店．那家书店的气氛很像伦敦的一些好书店．我在这家离我办公室很近的书店里看探险家斯文·海定①(Sven Hedin)的某部精彩的著作时，大脑中突然有了解法！那是我所经历过的最不同寻常的时刻．我把一切都记了下来，并把初稿寄给了马提·朱蒂拉，他立即认识到了它的价值．”

邦比艾里也有过对一个问题冥思苦想后，忽然找到解法的经历．故事发生在意大利的一个火车站．

“我和英国剑桥大学教授哈洛尔德·达文波特(Harold Davenport)合作搞研究时，需要级数的一些结果．我们在推广的黎曼假设成立的假设下，得到了我们想要的结果，但当时达文波特说只要我们利用某篇论文的一些结果，利用大筛技术，可以无条件地得到这些结果．当时，他在米兰游玩——他请了一星期的假去意大利旅游——于是我对他说：‘你一周后回来时，我将告诉你什么是对的，什么是我们可以放心利用的．’于是，我着手进

① 海定(1865—1952)，瑞典探险家，曾多次穿越亚洲中部探险，并发起主持中国和瑞典1927—1933年的联合考察，在考古和地理方面有重要发现．著有《穿越亚洲》、《丝绸之路》等．——译者注

行研究，发现在估计某些和时有个误差. 所以，我觉得是不是可以从矩形上的和入手，于是我真的获得了矩形上的和，再将它进行反馈. 我做了一些计算，结果神奇地出现了，在短短几分钟里，我知道了一切. 我坐在办公桌前工作了72小时，写下了解法. 在火车站接达文波特时，把论文交给了他.”

2000年8月，我在德·布兰奇的寓所与他会谈，他告诉我说，他准备撰写他的证明背景，他觉得会有四五十页. 【138】

“我觉得需要两三个星期才能写好，然后还要打印出来；开学之初，秘书们都忙于研究计划，所以得等一阵子才能打出来. 一旦手稿打印好后，我还得仔细通读，把许多东西检查一遍，我觉得我可能需要花一两个学期才能完成. 我没有理由着急，至少我要把它分给以前的一个学生以及尼科莱·尼科尔斯基，这样我就可以坐等某人愿意仔细考虑它的时刻了(电子文稿能看到). 现在，可能会引起轰动.”

证明本身仍在德·布兰奇的头脑里，但他相信自己能够轻而易举地把它写出来. “周三我或许可以开始写了，”他说. “少则12页，多则20页. 先前的理论实际上更复杂，而这个要简单得多. 现在，为证明黎曼假设，我所需要做的是完成ν函数的一个公理化的理论.”

但是，德·布兰奇又毫不隐瞒地承认自己没有把握，在我们讨论他的“证明”的过程中，他说了好几次. “你知道，这有可能是错的”，他说，“我只是根据目前的情况来说的，事情有时看上去很好，有时看上去很糟. 我只是在做合适的研究；我试图不去管它，尽管它影响着我的一生，也影响着其他和我有联系的人.”

要解释德·布兰奇证明黎曼假设的方法并非易事. 他在一个主要由他自己所构建的，称为“整函数的希尔伯特空间”的领域里做研究. 不仅他的方法无法向非数学家解释，而且连许多研究数论或复分析的数学家也得努力研究理论背景才能理解他的

基本思想.

事实上,正是德・布兰奇早期(大约从 25 岁开始)试图证明黎曼假设,才导致该领域的产生. 但当时他难以证明黎曼假设与这一新领域之间的关系. 他花了 10 年时间做这项研究,最终于 1984 年在圣彼得堡时,他觉得自己完成了证明. 他于 1985 年发【139】表了这个"证明",接着,一个模式出现了,这个模式注定要伴随他接下来 15 年的惨淡经营. 结果,证明是错误的.

彼得・萨纳克如今是黎曼假设研究领域的关键人物. 他是反对德・布兰奇第一个"证明"的数学家之一. "我那时是个研究生刚毕业的年轻人. 记得这份手稿来了,有人把它给了我. 没有人看它. 实际上我自己也觉得那人准疯了. 我的意思是解决这个难题的家伙……我花了许多时间,发现其中的一个大错误. 那真的是个大错误."

奥德莱斯科也看了德・布兰奇的早期证明,他甚至不相信其方法的正确性. "我明白他想做什么,但看上去似乎并没有什么希望:因为他以整函数希尔伯特空间为工具,这就像一把大锤子,他要找个钉子,用锤子来敲. 他试图在这个框架之下处理 ζ 函数,这似乎不太自然."

关于纯数学家的研究生活,令人惊讶的事情之一是他们花在某项任务上的大量时间. 考虑到数学家们在集中研究一个难题时是如何专注、如何忘我,他们能年复一年地做着同一个问题,实在是非同寻常.

花十几年功夫做某件事,可到头来却发现无需这么做,这真是一个天大的挫折. 德・布兰奇记忆犹新:"问题是,一个错误的方向会花上 10 年时间,然后又需要 10 年时间回过头来,所以你已花了 20 年时间才发现真理. 或许不需要真的花 20 年,但也是八九不离十的了."

但德・布兰奇并没有灰心(或者尽管相当气馁,但决心继续努力),他设法找到了另一种证明,比原来的方法要简单得多. 他

开始寻找一种叫算子的数学工具，取另一个已经为人所熟知的函数，将它进行变换，使得它的所有零点都位于临界线上. 这种零点分布叫做谱，就像彩虹中的颜色从红到紫分布一样，但这种谱并没有彩虹那样光滑，而是由许多不同的点所组成. 希尔伯特已经作出预言，这种谱方法会有用，至今它仍然是其他尝试的基础，不过利用这种思想的方式不同而已. 但德·布兰奇发现，他第一次对零点进行“操作”时，发现他的新方法把所有的零点放到了距它们原位半个单位远处，即在临界带的边缘. 要么得找一个新的算子，要么把已有的算子变形. 到了 1989 年，他觉得自己已经解决了问题. 【140】

那年早些时候，他获机会在巴黎报告他的工作，他想好好利用这个机会. “在我报告的时候，我觉得自己已经证明了黎曼假设. 你知道的，我不可能说：‘我正在做着关于黎曼假设的十分有趣的研究，请听我讲讲我的工作. ’人们根本不会接受你与黎曼假设之间的关系. 因此，要么我自己觉得已经有了证明，要么没有. ”他作了报告，宣布了他的证明，然后走了出去，丝毫没有给听众留下什么印象.

尼科莱·尼科尔斯基解释了其中的原因. “1989 年夏天，他在巴黎的庞加莱研究所作了 5 场报告，来解释他的证明. 由于当时的苏联还不是一个自由的年代，因此我没能去听他的报告. 但在同一个夏天，我在阿姆斯特丹呆了一星期，参加下一个会议. 会上我听说了他的报告. 一个听过他 5 场报告的人告诉我，路易斯在前 4 场半报告中解释了黎曼假设和数论的历史，最后，他说：“好，现在我们还剩下半小时，所以我要很快地介绍我的方法. ”然后他这样开始说了——block block block block block——最后证明完毕. 这当然没有让任何人感到满意. 事后向他请教几个技术上的小问题也根本不可能. 我自己问了好几次，但他只是说：‘哦，这是个非常小非常容易的计算——你自己可以完成的. ’他喜欢讲一些原理，而不愿意深入细节，这当然令

人失望了."

更糟糕的事发生了.回到美国后,德·布兰奇发现了他的证明中的一个错误.问题出在把一切都转移到同一条临界线上的算子上面.

"如果你有个算子,"他向我解释说,"它有点像黑盒子——你把东西放进去,再从中取出东西来.有某种改变黑盒子的机理,将光谱移动.这种机理通过转换来工作.有趣的是,所做的转换恰好是半个单位——这正是黎曼假设所需要的,因为临界带有一个单位宽,而临界线位于它的中间.你想要的是临界线上的谱,但它位于距临界线半个单位远处.所以你得把它推过去.我作的猜想就是能完成这个任务的机理.那时我的猜想是,你能够【141】把它推过去,从而证明黎曼假设.哎,事实证明,生活并不那么简单.因为 ζ 函数是个非常复杂的东西.它有许多决定一切素数的因子,而素数有很多——无穷多个.

"我花了十年时间才使自己确信,这是不可能的.只有在研究所作报告时,我才回过头来,说:'我该如何处理所有这些素数呢?'于是为了处理所有这些素数,我需要有一个完善的 ζ 函数理论,我得把它研究出来.结果,在弄懂并掌握了该理论之后,我却发现自己并不需要那个信息.如果你做对了,你可以毫不费力地把这些素数放进去."

在这点上,要说证明黎曼假设所需要的理论他早在 1962 年就已经知道了,德·布兰奇对此必不以为然."我只需明白,那已经足够了,"他说,"我所发现的所有其他信息都无助于证明黎曼假设.我在这个理论上所做的工作尽管很好,却对我的事业毫无帮助,无论是升职还是同事的认可,因为他们对此不甚了了."

在德·布兰奇关于自己思想演变的讨论中,始终充斥着别的数学家对他的敌意和忽视.无论这是否偏激,我确实从其他一些数学家那里了解到对德·布兰奇的敌意,当他们不抱敌意时,他们就生气了.一些人见过他,心生厌恶;另一些人则在读他的

论文后产生了看法;还有一些人听了些传闻就对他产生敌意.

即使是态度温和的米歇尔·贝利也觉得德·布兰奇有点让人难以接受."他是不是很怪?我在巴黎和他谈了3个小时,我们是在一家咖啡厅见的面——他说,'看到贝雷帽,你就能认出我了.'如今的法国人已经不戴贝雷帽了,所以你当然能认出他来.恐怕这是一次不尽如人意的见面,因为他想做的一切就是强调他的优先权,以及人们是如何窃取他的思想的.现在,对他的看法是,他已经做了一件很好的事——他证明了比伯巴赫假设.他所说的很多事情最终都是错的,但这一件事却对了,所以你还不能小觑他.他无疑是个富有技巧的分析家……,他的证明与算子理论有点关系,但简直无法和他谈论其中的细节.他和我谈话,是因为我是个物理学家,我比他差,对他没有威胁.所以他很健谈,但他对我们在做的任何研究都了无兴趣."

【142】

查尔斯·梁维克也是个热心肠的人.一次与德·布兰奇的见面给他留下了很多疑问."我从未读过路易斯·德·布兰奇的东西,因为我觉得那是在浪费时间.我听过他大约15年前在阿纳海姆(Anaheim)所作的一次报告,他说下一年他就能解决黎曼假设,只需把材料整理好即可,这是很愚蠢的说法.但是人们果真如痴如狂——等着黎曼假设解决的最后时刻的到来.我知道很多作者非要给自己限定最后期限后才能动笔.如果一位编辑真的准备把你枪毙掉,你就得把它写出来.一年过去了,接着又是一年……,他是一个很优秀的数学家.我甚至不把它称为错误.我认为唯一的重要错误是在证明之中.肯定会有人去审读这该死的证明,他们将会对其作出判断.我们情同手足……我相信,数学家们会十分乐意接受他的证明,如果他们觉得其中有东西的话.我个人并不在乎他是谁,他们会审读的."

不幸的是,梁维克太乐观了.审读像黎曼假设那样高深问题的证明可不是你晚上花一两个小时边喝咖啡边做的事.由于数学家已经作过两次错误的声明,因此你可能更不情愿花时间去

审读了.还有另一个因素——德·布兰奇在写数学论文的方式上是不愿让步的,正如他自己所承认的那样.

“每当有创见的时候”,他说,“需要读者付出努力去理解它.我对表达的理解有两方面,许多人或许不能接受.首先,在我看来,我是十分笛卡儿式的.作为数学家,我对逻辑次序感兴趣,而作为一个用英语写作来表达自己思想的人,我所具备的主要技巧是简炼.换言之,我往往选择最小的结构来表达;如果我有时间,我会说得散漫些,但我没时间.这两个方面合起来就意味着【143】许多人不喜欢这种写作方式.我希望读者做许多工作.俄国的读者曾对我的书(关于希尔伯特空间)作出评论——因为主要读者最后都在俄国——他们评论说,该书中有 300 个练习题,有 300 个难题需要解决,书的主要内容在习题上.所以我希望读者在没有任何提示的情况下自己完成这些习题,从而理解全书.哦,这需要好几年时间.对学生来说,做数学题是十分必要的.某个人不会告诉你它是什么——他把你引到正确的方向上,然后你自己做工作.恰有许多工作需要做,我感到很抱歉,但这是它的本质,因此它是一件难事.由于人们不理解这本书的目的,所以实际上并没有人作出努力.”

可想而知,一个写了一本书,希望读者花几年时间去读懂它的人,他所写的数学论文会有多么吓人.在我所遇到的所有数学家中,只有一位似乎能够——但并不情愿——对德·布兰奇证明的最后版本作出评价:尼科莱·尼科尔斯基.他曾对德·布兰奇证明比伯巴赫猜想助过一臂之力.尼科尔斯基现在波尔多大学,与德·布兰奇仍然保持着联系,尽管他非常谨慎,惟恐陷入审阅德·布兰奇论文的耗时的过程中去.但他是理解德·布兰奇想法的极少数人之一.因此,如果德·布兰奇想要告诉世人他已经证明黎曼假设,那么他就需要像尼科尔斯基这样的人.但即使是尼科尔斯基也觉得,德·布兰奇的方法并不具备这个艰巨的证明所需要的复杂性.

"黎曼假设是一个多方面的问题,"他说."它依赖数论、分析和几何.它与非欧几何、与其他许多许多事情相关联,因此它是不同的.他只有一种新思想——这个性质应该用某个算子语言来解释.他只是用一个个的算子去试:如果一个没有用,就用另一个去代替,从而改进论证,但我不能确定这次是否够了."

然而,当我问尼科尔斯基,如果德·布兰奇把证明寄给他,他是否会去看时,他叹了口气说:"你不可能真正'看完'像比伯巴赫猜想的证明那样的长达400页的手稿,至少我要看两三年. 【144】对于路易斯,任何一个结论要么很平凡,为人所知,要么太复杂,无法验证,无法解释.如果你相信它对,如果你有时间,那么你可以像当初审阅比伯巴赫猜想的证明那样去审阅它.但我不知道它是否正确.也许我老了,没有激情了,但我自己也有很多在研项目,要等几十年才能完成.我不知道……"

但在我的敦促之下,他不得不承认自己会帮着评价德·布兰奇的黎曼假设证明."是的,我会考虑这事的.我对证明的结构略知一二,所以很可能可以发现它与先前手稿的不同之处,先从总体的角度来考虑它.但他真正需要的是一支有热情的高水平的队伍.他在80年代中期为比伯巴赫猜想的证明找到了这样的队伍,地点是在世界上唯一的一个地方:在那里有许多高水平的人,他们不受每年在著名杂志上发表论文的市场压力的影响.他发现了一些奇怪的人,他们喜欢解决复杂的难题,即使没有把握,也愿意花半年时间去攻克.有好几次他问我,是否可以组织一些人来审阅他对黎曼假设的证明.我喜欢他,所以我回答'是'.如果你有很大的一笔钱(或许不像在美国那样大)付给某个研究机构——如圣彼得堡的同一个地方——这样我好邀请并支付五六个高水平的数学家——因为现在这里的薪水是零或几乎是零——那么就可以致力于此事;但这个建议没有得到任何地方的支持.在80年代的苏联,颇有很多人愿意只为了满足好奇心而工作.不幸的是,今非昔比.很可能,他身无分文,或担心

要和团队分享荣誉——我不知道.”

德·布兰奇过去的错误使得同行们对他所提新数学方法的态度日益谨慎.但是,错误本身并不会影响最终的成功.数学史上,最著名的数学家犯错误或被认为犯了错误的例子比比皆是.

康托尔是横跨19和20世纪的德国数学家.他的许多思想由于高深而震惊了当时的数学家.例如,他对无穷大的不同大小的研究,数学界一开始很难接受.1885年,康托尔给Acta Mathematica写了篇文章,但正当文章排版的时候,他收到了编辑米塔格-莱夫勒(Gosta Mittag-Leffler)的信,请求他撤回稿子:

【145】

> 我深信,在你能够解释新的肯定结果之前,你的新研究成果的发表会严重损害你在数学界的名誉.我非常清楚,你的情况就是这样.如果你的理论一旦被证明是错误的,那么,要在很长时间以后它才能重新引起数学界的注意.你和你的理论很可能在你的有生之年得不到应有的评价.于是,这个理论会在一百年左右以后被另外某个人重新发现,然后人们才发现你已经有了这个理论.只有在那个时候,你才会得到公正评价.但以这种方式[发表文章],你将不能发挥重要影响.和每一个从事科学研究的人一样,你当然希望发挥这样的影响.[90]

这封拒绝信使康托尔放弃数学而转向了哲学,但他的研究最终被人们完全接受,他现在被看作是集合论的创始人,他被告诫不要发表的正是这一理论.

1794年,法国数学家勒让德相信自己证明了平行公设.这是欧几里得在其几何体系中提出的一个公理,许多数学家试图从第一原理中推导出这个公设(现已知道这是不可能的).勒让德却深信它是可能的.一本数学史书写道:

> 在他的《几何基础》的几乎每一个版本中,勒让德

都"证明"了平行公设.然而,每一个证明都因为不充分而受到其他数学家的攻击.勒让德却是惊人的固执,他拒绝考虑平行公设有可能是错误的,他总是在后来的版本中提供新的证明,希望他的批评者们能感到满意.在第三版(1800)中,他用三角形内角和来代替原来的证明,在第九版(1812)中,他放弃了这个证明,就像他后来解释的那样,"又回到了欧氏简单的证法上来,参考了一些严格证明的注释."他尤其关心的是找一个适合于学生学习的证明,在第十二版(1823)中,他相信自己发现了正确的证明,这个证明保留在他在世时出版的其余所有版本之中.(它当然也是错误的.)在去世不到一年的1823年写成的一篇长文里,勒让德写道:

【146】

该[公设]……必须被看作是无可争议的真理之一,这是人们所不断追求的,且在人类知识的其他分支中极难得到的数学确定性的一个永久性例子.[91]

他固执地坚信公设的正确性,他甚至解释说,他写这篇长文的一个重要原因是他在第十二版以及所有后来的版本中所给出的证明"并没有得到某些教授们的认可.他们对它的准确性并没有提出争议,但觉得他们的学生理解起来太困难了".[92]

德·布兰奇也面临来自学生的反对.尼科尔斯基给我说了一个德·布兰奇在普度大学早期的有趣故事:"德·布兰奇是一本名叫《平方可求和幂级数》的课本的作者,他幸免于这本书的悲伤故事,因为他刚刚发明了这个分析方法,并开始给普度大学的本科生讲授这种方法.在学生的大规模抗议之后,他被学校主管停了课,并被取消给本科生讲课的资格.这真是一个大丑闻,所以有两年多的时间里他处于很窘迫的境况.这种紧张状态一直持续到他证明了比伯巴赫猜想之后."

与其他教师的课相比，学生发现这门课要求太高了. 也有可能德·布兰奇不承认这样的事实：他所教的领域对他的听众来说是陌生的、全新的. 尽管证明了比伯巴赫猜想，德·布兰奇仍然很难像其他许多教授那样吸引学生，他将此归咎于同事们的态度.

“我招收学生的能力受到我的处境的严重影响，”他说，“对于所招的任何一名学生，我有责任为他选择一条研究道路. 我与其他大学同行之间的关系简直是灾难性的. 他们不会接受我的学[147]生. 我从不拒绝学生，然而，事实是，能力强的学生希望他们的老师会去伺候他们. 当老师不伺候他们时，他们就对老师吹毛求疵. 我的要求是，如果学生选我作导师，他就要心甘情愿冒这个险.”

德·布兰奇是个狂人. 他在研究生涯的早期就确定了证明黎曼假设的途径，他从未放弃这个目标. 这一目标不可避免地使他在日常生活中显得有些精神错乱. 我感觉到，在他的脑子里，旅行、吃饭、社交、税收、电视在下一步证明的要求面前都可以不要. 但时不时地也有迹象表明他与外界有着接触. 有一天，他熟悉克里斯蒂(Agatha Christie)的小说让我感到惊讶. 结果发现，在这种娱乐的背后有着清教徒似的目的. 他想学德语，因而决定通过读克里斯蒂的德文小说来达到这个目的. 又有一次，他提醒我 Moriarty 教授——福尔摩斯的劲敌——精通二项式定理.

在 68 岁这个许多数学家都愿意退休的年龄，德·布兰奇表达了他对未来的憧憬和担心.“我的研究地位前途未卜. 无论是否获得大奖，数学家通常以 40 岁来划分. 为得到菲尔兹奖，数学家不能超过 40 岁，至少对于他完成的工作而言是这样. 然而对我来说，30 岁以前所做的研究工作至今还没有定论. 所以你看，这是一个很不寻常的情况.”

要么很现实，要么很狂妄，德·布兰奇描述了如果他在以后几年里未能达到目标，结果会发生什么：“我给人留下的印象将是一个做了很多让社会印象深刻的研究的人物，而不是把数学

引向新航程的人，或者把握 20 世纪方向的人. 这不是 20 世纪数学或泛函分析的现实.”

我第一次拜访德·布兰奇时，他正在对黎曼假设的证明作最后的检验；我计划这一年晚些时候再去普度大学见他. 到那时，他会完成证明吗？不幸的尼科尔斯基会埋头于那又长又难的手稿吗？或者证明还和原来一样近或一样远？ 【148】

11. 数 学 物 理

> 该领域的研究活动猛增——由于两大领域的联姻，过去 6 年里所取得的进步简直令人难以置信.
>
> ——斯蒂夫·戈内克(Steve Gonek)

数学家对黎曼假设研究得越深入，他们发现的关系网就越广，这标志着黎曼假设的深奥. 很久以前，对于证明的寻找已从初等数论转向为攻克该难题而专门建立的其他数学领域. 但没有人能预见到，证明可以在数学之外的物理学上找到，更深不可测的是，黎曼零点竟与强磁场中氢原子的行为有着神秘的相似性.

人们很久以前就知道物理和数学之间的关联. 毕达哥拉斯观察到产生和谐音的振动弦的长度构成整数比$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\text{等等}\right)$，和谐的 8 度音的音程是由这样两条弦产生的，其中一条的长度是另一条的一半. 但过去一直没有人能将素数与任何物理系统联系起来.

新的发现来自几十年来对原子核行为的研究，这项研究是核物理学家为分析原子在不同条件下的行为而进行的. 特别是，物理学家对制作能量级的大量不同状态的图像感兴趣. 而这种能量级与原子或原子粒相关. 20 世纪以前，我们对物质——从豌豆到行星——在力作用下的运动的理解是受所谓经典力学支配的，这种力学建立在牛顿所描述的定律基础之上. 然而，物理【149】学家在探索分子和原子的隐秘之处时，却发现最微小的粒子是

以非经典的方式运动的，为了描述这种运动，人们建立了量子力学这一新的工具．科学家们从描述个体粒子或其他物体的行为转向观察全体粒子的特征，并用统计方法对它们进行描述，几乎就像用统计数据来描述一个社会一样．

在过去 30 年左右时间里，混沌理论这一更新的领域发展起来，用来解释在某种条件下在物理系统（或大或小）中所发生的一类无法预测的行为．混沌理论一开始并非用于量子力学领域，但后来人们意识到，在某些情况下，即使是最小的粒子有时也表现得不可预测，需要用新的理论来描述它们．

为处理原子物理学中的新发现而发展起来的应用数学展现了其自身的生命力．把量子力学应用于粒子系统时所产生的数以千计或数以百万计的数据是用一种叫随机矩阵的数学技术来处理的，这样做的结果似乎会产生与黎曼零点相似的数据．把所有这些主题沿通往黎曼零点的轨道联系在一起的想法始于修·蒙哥马利遇上弗里曼·迪森的那次茶话会．

在两人见面的时候，蒙哥马利还从未听说过随机矩阵．可到如今，在黎曼假设研究的某些方向上，他们几乎言必称随机矩阵．用于处理原子物理学数据的数学技术到头来对数论具有意想不到的启示．这两门学科相互作用时，事情并不常常以这种方式发生．有很多故事，说的是抽象数学思想在发现之后的几年或几百年后在物理和化学中惊人地有用．但是，量子力学和数论的联姻却要稀罕得多．

这种联姻导致了布里斯托尔大学米歇尔·贝利教授与他以前的学生、现在的同事约翰·济廷教授之间的合作．济廷一半从事数学，贝利则研究物理学，但两人对对方的学科都很熟悉．济廷向我解释说，处理随机性统计的能力是现代物理中的一个必要工具．

“随机思想在自然科学中普遍存在，”他说．“如果我现在要计算由于空气分子的撞击而对墙壁产生的压力，那么我可以找出所 【150】

有空气分子的位置，解出牛顿方程，求出它们撞击墙壁的次数，从而计算出压力的大小. 但是，人们认为，假设空气分子向所有方向随机运动是明智之举——事实并非如此. 一间屋子里有 10^{23} 个空气分子，如果你相信牛顿力学的话，它们是沿精确描述的弹道运动的. 但从统计学上讲，其数字并不能从随机序列中区分出来.”

济廷已经帮助贝利设计了数学工具，用来描述物理学中所谓的“量子混沌系统”. 结果表明，这些工具的运用可以导致与黎曼 ζ 函数惊人相似的数学函数.

米歇尔·贝利在布里斯托尔大学的魏尔斯(H. H. Wills)物理实验室工作. 在人们认为香烟除了把烟灰掉在细条纹裤子上以外并无其他害处的时代，这个实验室以一位香烟制造商的名字命名. 2000 年 3 月，我第一次拜访他时，阳光不合时宜地射入他那拥挤的小办公室，他并不在意别人会怎么看一个爵士的穿戴，只穿着一双拖鞋. 贝利中等个子，头发刚刚修剪过，胡子与头发等长，是个和蔼的，说话很快的人，有时话说到一半，便接着下一个想法. 他的思想来得既模糊又迅速.

新的数学可以从物理中产生，对此我很感兴趣. 我不明白，物理学家们所做的实验工作何以能提供如此多的东西，远远不止需要数学家去解决的问题. 物理学家所发现的各种各样的现象需要用现有的某种形式的数学来描述. 以拉马努金的其中一个发现为例，一个看似没有实际应用的数学知识几年后却成了用来解释在拉马努金时代人们未能发现的现象的工具.

但贝利和他的同行约翰·济廷的工作却与此不同. 从某种意义上说，他对量子混沌系统——贝利称之为“量子混沌学”——的理解使他产生了一个重要思想：黎曼 ζ 函数的行为就好像有个潜在的动力系统，控制着所有零点的位置. 这并不是说真的有一个物理系统驾驭着黎曼 ζ 函数——这怎么可能呢？——而是说有可能对一个完全可行的物理系统作出数学的描述，如果真的存在这种系统，它将把黎曼零点变成能量级或其

【151】

他某个物理特征.

贝利并不是数学物理学家,也不是物理学家—数学家.他称自己所研究的是"物理的数学的物理".为了理解这句格言式的话,需要了解很多东西.但大约1小时后,我认为自己已经领会了贝利关于黎曼假设思想的基本要点,我可以理解那句话了.

贝利解释说,"很多数学都源于物理:如微分方程、矩阵和代数.我利用数学工具研究这些与物理有关的数学方程的解法.以波动方程[量子力学中的关键技术]为例.它们源自声波、光波和量子波.但是,一旦得到了波动方程,数学都是相同的.我在理解这些方程中的模式时,是根据波的物理,而不是根据任何特定的物理(如它是声音还是光还是量子等等)来考虑的,因为很多概念处于更高的层次.但它们仍是来自于数学的物理概念,而这种数学又来自于特殊的一类物理."

作为一名物理学家,贝利研究粒子行为的数学.它们的运动、能量以及其他特征都是通过数字来描述的.由于我们几乎不可能观察和度量单个粒子的这些特征,物理学家所收集的数据都是统计上的,来自于数百万或数十亿个粒子的特征.

量子力学这门学科是我们今天理解微观世界的基石.它是在数十年发现和探索基础上,于20世纪20年代建立起来的.其中的发现和探索之一是电子在得到能量后绕原子核旋转的规律.当你给原子加上能量时,原子的能量并不是平稳地增加,而是像沿楼梯把物体向上推一样,一次提高一级.如果一开始你在楼梯的不同级上放一系列重物,对它们慢慢施加上升的力,这些重物就可以上升到更高的一级.如果所施加的力不足以把重物【152】抬高到上一级,那么重物就会停在原位.一个很强的力可以把重物提升2到3级.但无论如何,重物的最终位置总是在某级台阶上,决不会悬在两级之间的某个位置处.

济廷给我打了个比方:"在经典力学中,能量可以取到你所希望的任何值.所以如果你在小车上,想要给车子增加一些能

量，只要把油门踩得重些.但在量子力学上，情况并不是这样，原子里的电子所能拥有的能量只能取特殊的离散值.”原子在得到更高的能量时，原子粒子可以占据数以千计的台阶或轨道.

20世纪下半叶，科学家们通过量子力学的研究，对一些原子粒子的行为方式有了细致的理解.但是，原子的某些行为和组合似乎并不遵循量子力学的法则.好几个原子以某种特殊方式捆绑在一起，或者个体的原子受合力作用，其行为方式为物理学家所难以预测.好在混沌学接着出现了.

混沌理论是为了描述宏观系统而发展起来的.这种宏观系统由比亚原子粒子大得多的元素所组成，它们的行为方式本来应该可以预测，但事实上并不能.混沌系统的一个例子是绳子上的一个小铁球(像一个单摆)，悬挂在两磁体之间(分别称为绿色和红色).如果把小球放在某个起始点，然后松开它，让它自由摆动，那么它迟早会停在某个位置，指向某一个磁体.但很难选择这样一个起点，以确保小球在靠近红色磁体的地方停下来.不管起点怎样接近同一个点，只要有极细微的差异，从而作用在球体上的磁力发生极细微的变化，最终都会使小球停在靠近绿色磁体的地方，而不是靠近红色磁体的地方.

“混沌的信息，”贝利说，“是指一个系统的运动很复杂，但系统本身不必很复杂.那就是混沌的一切.”所以量子混沌领域出现了，混沌的思想被用来更好地理解某些原子粒子系统的运动与能量状态.通过量子力学和混沌理论的这种综合，大量的数据需要用新工具来分析.这些工具就是随机矩阵.

【153】

就像一个受高能激发的粒子本身一样，贝利开始了对这个课题的研究。他从一个主题跳到另一个主题，有时回到较低能量级，有时则跳到较高能量级.尽管他是个物理学家，人们却几乎没看到他做实验，起码在这个领域是如此.但是，从某种意义上说，他所运用的数据来自真实的物理实践.

已经设计了数百个实验，通过把中子——原子核中的粒

子——轰击到不同目标(通常是某种块状或片状物质)来探索原子的结构.即使是表面看上去很坚固的物质,其原子核之间也有很大的空间,但有时中子穿过物质时会撞上原子核,或从附近经过,方向发生了偏斜.中子穿过目标时要么反弹要么减速,这为我们提供了目标中的原子核有效截面的信息.这种有效截面是排斥中子或改变中子方向的核力的一种平均值.到了20世纪50年代,核科学家从核反应堆和其他技术目所需要的俘获中子的有效截面中积累了大量的数据.它们只是一组还没有得到解释的数字,也许可以通过统计分析,获得关于原子粒子更多的信息.

"因为处理的是很高的能量级,"贝利解释道,"精确知道能量级的位置意义并不大.有意义的是统计这些数字是如何排列的——它们是否相互排斥,是否规则,是否随机,等等.现在,我们从五六十年代研究这些问题的核物理学家那里得到一种思想:如果你得到某个原子核的第10 000个激发态,你永远无法得到能作出精确预测的量子力学理论,因为你对力了解得并不够.但你可以求助于统计学.这里,由于你有许多粒子,因而问题就复杂了."

物理学家面临的任务是找到一种从无数零散信息中抽取有用数据的方法.这就迫切需要一种可以同时处理很多数据的技术,于是矩阵便派上了用场.

数学上的矩阵就是一些数的排列,可以像单个的数一样来操作.如果你有两个矩阵 A 和 B,则可以将它们相乘或相加,得到另一个矩阵.当矩阵中的单个元素代表原子或原子核的物理状态时,对矩阵所进行的数学运算就对应于将亚原子系统从一种状态变到另一种状态的物理过程. 【154】

贝利和他的同事们相信,与原子粒子某些系统的混沌行为相关的矩阵集可能具有与黎曼 ζ 函数零点集相似的特征.这些矩阵叫做随机矩阵,它们可以有数以百万计的元素.与每个矩阵

相关联的是一组叫做特征值的数.有时,这些特征值是复数,但当它们被用到物理上时,它们代表了诸如能量、动量这样的真实量,所以它们是实数.特征值是实数,这一事实也意味着你可以将其排列成一个简单的数列,以产生所谓的谱.(关于矩阵与特征值的详细内容,参阅配套知识 6)

贝利和济廷已经对他们的数据——特征值的谱——进行了分析,并将其与安德鲁·奥德莱斯科从黎曼 ζ 函数零点中所获得的数据作了比较.他们发现两者之间存在很大的相似性.就好像黎曼零点本身就是物理实体一样.

"黎曼零点与混沌系统若合符节,"贝利说,"这是个强有力的暗示,在黎曼 ζ 函数的背后存在某个不为人知的动力系统,你可以将其设想成经典的动力系统,即某个混沌轨道——没有人知道那是什么,甚至没有人知道它有几维,但是,如果你当它是量子力学,用物理方法处理它,那么该系统的能量级就是黎曼零点."

有一段时间,随机矩阵理论似乎足以描述经典混沌系统量子能级的统计学.但当奥德莱斯科和贝利首次交换意见时,奥德莱斯科发现,在将某些较大零点看成某个动力系统的特征值时,开始出现错误.

"奥德莱斯科找到了这些数,他感到十分担忧,"贝利说,"因为它们与我们的数字不相符,让你觉得你是否在某个地方犯了小错误."但是他和他同事们接着发现,对物理学的新理解意味着他们需要改变他们自己的数字."1985 年,我开始对随机理论和量子混沌学之间的联系进行解释.结果表明,量子混沌系统只是在很短的能级范围内可以用随机矩阵来描述——大范围内的相关性是不同的,这表明,量子混沌系统的模型并不能完全通过随机矩阵来建立.就在那时,我正好做出了对于更大的能级群,如何得到偏差的理论,我成功地把它应用到黎曼零点上来.所以我对奥德莱斯科说,'我可以用你的数据吗?'我对其进行调整,得到这条漂亮的光滑曲线.正是这些典型的差异,我预测也会出

【155】

现在黎曼零点的分布之中——恰好是奥德莱斯科通过计算所揭示的差异.因此,结果强有力地表明,黎曼零点并不是随机矩阵的特征值,而是与一个量子系统相对应的矩阵的特征值,关于这种量子系统的经典动力学便是混沌."

贝利的激动情绪很有感染力,但他还未进入角色.

"有很多人都试图解决这个问题,"彼得·萨纳克说,"一切都会不胫而走.如果我能证明这个和这个等价,就不会有什么影响了.当今大多数人的观点是,你真的必须按从某个地方获取某个新信息的方式来理解这些对象."但萨纳克相信,随机矩阵理论很能产生新信息——如果可以描述能量级为黎曼 ζ 函数零点的物理系统的话.既然这不必是实际存在的系统,那么它只须可能存在就行了.

博学的美国物理学家穆雷·戈尔-曼(Murray Gell-Mann)把怀特(T. H. White)《石中之剑》(*The Sword in the Stone*)中的一句话用到物理学上:"任何事情,如果不受禁止,那就是必须做的."意思是说,如果物理学允许某个系统或过程存在,那么这个系统或过程就会存在于宇宙的某个地方.尽管贝利觉得自己远未找到具有产生黎曼零点行为方式的物理系统,但他并没有排除找到这种系统的可能性.

"我相信,"他说,"存在某个描述空间粒子的数学动力系统.这是从数学上产生的事情,但由于它具有经典动力系统的结构,因而可通过某个合适的实验——磁场实验、光学实验等——来实现,但不能自然产生.该系统具有这样的性质:如果你用量子力学的精细方式对其进行观察,它会有能量级,而这些能量级正是黎曼零点的高度.这不是说你在某处用分光镜进行观察,看到黎曼零点以光谱形式出现,而是说某个聪明人能构建一个物理系统,该系统开始看上去很不自然,但它会变得越来越自然." 【156】

如果数学上最重要的未解决问题被物理学家而不是数学家解决,那么这将是个惊世之举,不会有多少数学家觉得有此可能.但正

如贝利所说,"我们可以梦想. 济廷和我谈及此事……两三年前,我们竭尽全力在一篇很长的评论文章中写下了所知道的一切,最后一部分包含了一个特殊的假设,但当时我对它有点怀疑."

然而,有一个人可能会在贝利和济廷的研究基础上,运用新的数学方法找到证明. 他就是法国数学家阿兰·康尼斯. 与其他主角相比,他较晚才开始研究黎曼假设,但现在已变得桀骜不驯了.

贝利告诉我,他是"世界上最伟大的数学家之一,极富有想像力,他了解动力系统. 他很可爱. 有些数学家觉得我们物理学家不作证明,我们常常以他们不屑的方式去了解和猜测事物,然后他们朝我们做梦都想不到的方向对其进行开发. 这的确是双向交通. 这中间我没看到有任何等级次第,但有些数学家却嗤之以鼻. 我过去常常说自己是乐天派. 乐观主义者认为我们生活在一切可能世界中最好的一个里. 悲观主义者知道我们的确如此. 但现在我不那么乐观了. 我觉得康尼斯可能已经找到了证明,剩下的只是个理解的问题,但我还拿不准. 目前我们离此还很遥远."

我计划拜访这位"可爱的"阿兰·康尼斯,尽管在经过贝利思想的旋风之旅之后,我不能确信自己还要理解多少抽象内容. 但坦白说,即使是贝利也觉得自己不能每天 24 小时都想着这些高深的领域.

"这种东西在我的骨子里,"他说,"但如果你没有经过多年【157】的研究,那它完全就是神秘的. 这是能让你发疯的那类事情,我们发现,每几年里都有几周,我们受它困扰. 每次我们研究它时,会取得一点小小进步. 然后,我们精疲力竭,转而去做别的研究. 也许这就是为什么我们不能成功而怀尔斯却成功了的原因……我有这样一个问题:'顿悟的基本粒子是什么?'是'清晰子'(clariton),问题是,明天还会产生'反清晰子'(anti-claritons),它会把你今天所有的'清晰子'消灭掉. 在这个课题上,我们有许【158】多这样的'粒子','清晰子'之后接着'反清晰子'."

12. 一个值得称赞的目标

几十年前，我开玩笑地提出，我们应该接受ζ函数

不扩散条约.这些函数的种类太多了.

——塞尔伯格，2001

黎曼ζ函数已把触角伸向数学的许多分支，因此，不可能预测黎曼假设的证明会来自何处——或来自何人.我觉得米歇尔·贝利进入了黎曼假设圈子，他也许会有感觉，谁有可能证明它.

"事实是，并没有什么圈子，"他告诉我说，"有些人独自在做研究.黎曼假设是个大难题，一些人受个人志向的激励，他们会默默地做研究，不告诉任何人，就像安德鲁·怀尔斯证明费马大定理一样."

布里安·康雷认为，孤立地研究黎曼假设可不是个好主意.康雷是个高个子，轻松愉快，看上去比40出头的实际年龄更年轻些.他生活在硅谷南面居民区的一幢宽阔的矮房子里.我们交谈时，他指给我看一座小山上的一幢楼，从小山上能俯瞰他自己的房子.

"那里曾是个饭店，"他说，"在搭起的平台上举行过一次婚礼，但平台倒塌了，惹了很多官司.我们希望它成为AIM新的数学中心."

AIM——美国数学研究所——由电子百万富翁约翰·弗里(John Fry)创立，以鼓励研究黎曼假设的数学家彼此进行合作.

康雷是 AIM 的所长，他本人也在研究黎曼假设. 就像那些被怀【159】疑试图证明黎曼假设的人一样，他声称自己并没有很强烈的愿望. 但他以 AIM 的合作精神，十分愉快地向我谈起他已有的一些想法.

“黎曼假设是连接加法与乘法的最基本的纽带”，康雷告诉我说，“所以我以最简单的方式将它看作是关于加法和乘法的联系我们并不理解的某个真正基本的东西.”这种联系来自于欧拉所发现的漂亮公式，在该公式中，涉及所有整数的级数之和等于涉及素数的级数各项之积. “我认为大多数数论家都会相信，你的确有必要利用这些因素来证明黎曼假设，”他说.

康雷的证明思想利用了一个叫莫比乌斯函数的不同寻常的函数. 说它不寻常，是因为它清楚地显示了函数思想的任意性和使用价值. 总的来说，迄今我们所见到的函数都能够作出图像，它随着变量的递增或递减而连续地变化. 函数 $f(x)=x^2$ 随着 x 的增大而连续地增大，$f(x)=1/x^2$ 随着 x 的增大而连续地递减，只是在正数与负数的中间 $x=0$ 处函数值趋向无穷大. 但是莫比乌斯函数远非连续函数. 事实上，它依赖于 x 的某些特征，只取到三个值，即 $+1$，-1 或 0. 所以，该函数的“图像”只是看上去很随机的位于三个位置上的一系列零散的点.

一个整数 n 的莫比乌斯函数以 $\mu(n)$ 来表示，只适用于整数. 符号 μ(读作 mew)是个希腊字母，与 m 相当. 法则如下：若 n 为素数，则 $\mu(n)$ 等于 -1；若 n 为由几个素数相乘得到的合数，则有 3 种可能：至少有一个素数重复时，$\mu(n)=0$；有偶数个不同素数时，$\mu(n)=+1$；有奇数个不同素数时，$\mu(n)=-1$.

那么，$\mu(15)$ 等于多少呢？算术基本定理告诉我们，15 可以唯一表示成素因数的乘积：3×5. 其中没有重复的素数，而且有偶数个不同素数，所以 $\mu(15)=+1$；$\mu(29)=-1$，因为 29 是个素数；【160】$\mu(30)=\mu(3\times2\times5)=-1$，因为 30 是奇数个素数的乘积；$\mu(96)=\mu(3\times2\times2\times2\times2\times2)=0$，因为至少有一个素数重复出现了.

这听起来可能让人很困惑——若以这种方式取值，这个函数会是什么样子呢？但这样想并没有抓住问题的关键. 该函数是由一位数学家（莫比乌斯，以其单侧带而著称）于1832年定义的. 我也可以定义一个函数，称为萨巴（Sabbagh）函数$S(n)$，它可以我想要的任何方式取值. 例如，n为所有偶数时，$S(n)=5$，n为所有奇数时，$S(n)=117.382$. 或者，当n为完全平方数时，$S(n)=\sqrt{n}$，当n不为完全平方数时，$S(n)=\frac{1}{2}$. 这些都是完全正确的函数——只是它们对任何人都绝对没有用处，而莫比乌斯函数却可能是为某种目的而定义的.

对于整数1—10，莫比乌斯函数的值分别为

$$1,-1,-1,0,-1,1,-1,0,0,1.$$

这个数列可以同样枯燥的方式继续下去.

与莫比乌斯函数相关的是默顿斯（Mertens）函数，记为$M(n)$. 为了求$M(n)$的值，只要把$1-n$的所有莫比乌斯函数值加起来. 因此，根据1—10的$\mu(n)$值，我们可以求出1—10的$M(n)$值：

$$1,0,-1,-1,-2,-1,-2,-2,-2,-1.$$

尽管它看上去不怎么样，但请相信，这个函数要比莫比乌斯函数有趣得多，一个简单的原因是：若能证明$M(n)$的绝对值总是小于n的平方根，那么黎曼假设就成立了. 这叫默顿斯猜想.

以$n=10$为例，在上面的数列中，$M(10)$的绝对值等于1，符合黎曼假设成立的情形，因为10的平方根约等于3.162 2. 数学家已经证明，对于n的很大的值，该猜想成立. 很多年来，人们觉得猜想似乎对n的所有值都是成立的，尽管并没有人给出证明. 于是，安德鲁·奥德莱斯科和他的同事赫尔曼·德·里尔（Herman te Riele）出现了. 他们于1984年证明，有一个比10^{30}还要大的数不满足默顿斯猜想——称之为N. 换言之，$M(N)$大于N的平方根. 因此猜想不成立. 但在数学上的事情就是这么令人泄气，这并不能证明黎曼假设是错的. 尽管默顿斯猜想的证 【161】

明能有效地证明黎曼假设,但是推翻默顿斯猜想却并不能因此推翻黎曼假设.

康雷对莫比乌斯函数感兴趣的原因在于,可以用 $\mu(n)$ 所有的值(直到 n 趋向无穷大)来写出与黎曼 ζ 函数等价的式子.当他描述自己的方法时,即使数学高度地专业化,我也能从中感觉到这位特殊的数学家是如何孜孜以求地研究一个问题的,以及因自己每一次小小的进步而产生的兴奋.

“该理论中包含着一整串不同的步骤,需要了解很多东西才能入门.一旦你掌握它,你就会在许多不同的地方瞎忙乎.对这个问题肯定会有直觉,会有技巧.尽管你有了公式,对不同参数做过很多检验,并看到它们是如何起作用的,但你也会有你的直觉,对事物如何发展的直觉.把所有这些放在一起,你就会知道,你在沿着正确的方向前进,而无需把什么都检查一遍.然后你发现自己达到了目标,再回过头来看,发现一切都是绝对正确的.所有这一切都需要很多技巧、直觉、经验等等.这有点像寻找好的踪迹,从而把东西找到一样.

“一方面,这一方法似乎很明显证明不了黎曼假设.另一方面,我的确对证明黎曼假设的途径有些想法,但我还没能完成它.我觉得,多数人很可能不太相信这一特殊方法,所以我要说,我是与你谈论这个方法的人中最乐观的.我期待莫比乌斯函数的一个真正漂亮关系的奇迹般的出现.所以它是魔术.”对于这个怪异的比喻,他自己也笑了.

康雷对他自己思维过程的理解与我采访过的其他数学家的【162】理解相一致.他们各以稍稍不同的方式为那瞬间灵感——即康雷所寻求的“魔术”——创造最佳条件.有时,仅仅知道或相信问题解法的存在就可以激励数学家去发现它.罗格·希斯-布朗(Roger Health-Brown)曾听说有人已经解决了一个特殊的难题.

“我很想知道这位作者到底是如何证明这个结果的,通过整整半天的冥思苦想,我获得了解决该难题的关键思想.正是在那

段时间的某一天里，你在头顶上获得了一个气球，气球里面有个灯泡.'啊，对了，谢天谢地！'接下来是艰苦的工作，可能枯燥乏味.我发现那是个十分耗时的过程.在那个过程中，我从未遇到过什么搞不定的事情.这就像是个洗衣机修理工——你熟悉你的机器，你总能把它修好.也许你得更换越来越多的零件，但你总能把它修好！"

查尔斯·梁维克指出，对于试图作出创新工作的职业数学家来说，使数学变得很难的其中一件事是，你永远不知道你离目标有多近."记得我曾经想做一名运动员，"他说."如果你想成为一名跳高运动员并参加奥运会，你会说：'行，我得跳过8英尺.'于是你非常非常刻苦地训练，或许只跳了5英尺，再花一年时间，你跳了5.3英尺——你实实在在地看到了差距在缩小.但在数学上，情况并非如此.你不能真实地看到你的问题出在哪儿，离问题的解法有多远，那是智力和体力事业之间的实实在在的差异——在数学上，你就是不知道.某个很出色的数学家可能非常刻苦地去研究黎曼假设，但他并不能确定黎曼假设是近在眼前，还是远在天边.接着，他会感到受挫折，甚至不想谈论这个话题.当他们攀登珠穆朗玛峰时，他们可以说："好，我们还有1 000英里的路程，好，或许我们得带氧气瓶了."你可以用非常标准的有趣方式将它精确地算出来，那只是个耐力的问题.但数学不仅仅是耐力的问题.研究数学确需耐力，但还有别的触摸不到的东西.我昨晚在电视上看了杜鲁门的传记，这家伙一生中，大部分都是失败的——但为了某个原因，他仍然勇往直前."

李特伍德描述了他证明阿贝尔-陶伯(Abel-Tauber)定理时的一个关键时刻： 【163】

一天，我在琢磨导数定理，突然脑中闪过一个增大微分数 r 的念头.那时，我工作的房屋正逢春季大扫除，我只能出去在倾盆大雨之中散步2小时.这个问题

在我的脑海中剧烈翻腾：材料杂乱无章，充斥着无关的复杂内容（最后被清理出去）．“思想”是模糊的、难以捉摸的．最后，我伫立在雨中，站在一座小桥上，茫茫然注视桥下的溪流，几分钟后，我确定事情完成了．在回去作出证明之前的 40 分钟，我可毫不轻松．[93]

但是，不论孤独的数学事业有何快乐，只有与他人分享思想才可以将数学问题引入新的方向．近些年来，关于黎曼假设的一件大事是 1996 年在西雅图召开的一次由 AIM 举办的纪念素数定理证明一百周年的学术会议．500 名数学家参加了会议，将人们对随机矩阵的兴趣推向了高潮．这也促使康雷和他的同事们计划召开小型会议——专题研讨会——以便更深入地探讨所出现的一些高深思想．其中一个专题研讨会于 2001 年 5 月在帕洛阿图市召开，其主题是“L -函数与随机矩阵理论”，这为我观察一群数学家提供了机会．他们中的多数人彼此十分熟悉，他们奋袖出臂，在他们的研究领域的前沿做着真正的数学．其中一位名叫安德鲁·格兰韦尔的与会者认为，这样的专题研讨会很有价值，尽管他对会议能否取得突破感到怀疑．

“我觉得约翰·弗里有些乐观”，他说．“历史上，团队的合作并不是取得重大突破的方式．两个人合作研究当然可以取得突破，如蒙哥马利和法恩(Vaughan)．本学科中许多重要结果都是蒙哥马利和法恩合作研究的结果．当然，剑桥的哈代和李特伍德也是如此．但是，起作用的是思想的交流．大多数人认为这很明显，他们试图对自己可能并不真正信任的事情持有相当积极的态度．但是我觉得思想多多益善．听取并吸收他人的思想，考察【164】它们的发展方向是十分有益的，但这是否真的是黎曼假设证明道路上的一大步，只有天晓得．”

弗里创建 AIM 时，以为如果他花上几十万美金让该领域最优秀的人才聚到一个地方，花上一个星期去证明黎曼假设，那么

他们就能证出黎曼假设来.这种态度就像20世纪60年代末肯尼迪的把人送上月球的诺言——这个诺言得到了实现——或者尼克松的通过类似的脑力攻击来治疗癌症的诺言——这个诺言并没有实现——一样.弗里的初衷同样没能实现.

尽管弗里对西雅图会议没有取得突破感到失望,但他坚信,合作研究依然是有效的,但需要更长的时间."L-函数"研讨会由各方面的数学家参加,从塞尔伯格(一位与会者对我说,他是该领域中最杰出的健在的数学家)到穿着短裤子的新面孔.事实上,由于衣着没有规定,从正式服装到内衣,各种穿着都可以,因而穿短裤子也不碍事.一位身穿粗厚棉布衣、身材魁梧、看上去好像可以用步子测量大楼尺寸而实际上是伯克利教授的澳大利亚人;一位可能会成为冒名顶替拉马努金的印度人;一位任教于杨百翰大学的中国数学家,一群英国男女;一位美国黑人;一位来自特拉维夫的红头发以色列人;一位来自新泽西的头戴棒球帽、表情忧郁的密码专家;还有和蔼可亲的布里安·康雷,他从后面看着,以确保不断有咖啡、汽水、面包、松饼、优质红酒、墨西哥啤酒供应.

这个研讨会于周一上午开幕,第一个出场的是彼得·萨纳克的合作者尼克·卡茨(Nick Katz),他穿着短袖、丝光黄斜纹裤、短袜和凉鞋,满头白发,一脸胡子.在描述卡茨-萨纳克猜想时,他不断挥舞双手.这个猜想如果成立的话,那么可以对黎曼假设的证明起到一定的作用.

"这儿有四个东西,"卡茨指着黑板上画得很粗糙的圆说,于是他开始说明这些"东西"是如何成对出现的."如果这里有一个,那么那里也有一个,如果这里有一个,那里就有另一个."这个"东西"就是随机矩阵的特征值.因为它们是复数,所以不能将它们排列在一条直线上.但可以将它们沿着圆周放,这就是卡茨正在做的工作.【165】

卡茨-萨纳克猜想是关于"L-函数"的一个结论,该函数激

起布里安·康雷的热情:“它是一个完整的漂亮的学科,黎曼 ζ 函数只是其中的第一个,但不过是冰山一角. 这些 L-函数是最令人惊讶的对象——它们的存在性,它们具有这些令人难以置信的性质以及与所有这些算术上的东西的关联——它真是一个漂亮的学科. 发现这些东西,就像发现宝石一样,你很惊讶于它的存在,它的这些性质,而且还可以研究它.”

萨纳克告诉我,L-函数何以是一类 ζ 函数.“我们有一个 ζ 函数的动物园,其中包括 L-函数. 黎曼是出生于这个动物园的第一个人. 知道了黎曼 ζ 函数的一切,我们就知道了 ζ 函数的动物园. 有一整串这样的函数——它们是数论中最重要的对象,知道了 ζ 函数,也就知道了别的函数. 就像我们不能证明关于黎曼 ζ 函数的黎曼假设一样,我们也不能证明任何其他函数的黎曼假设.”

约翰·济廷试图为我概括出 L-函数的本质.“它们所有的公式都是相似的,”他说,“它们是无限和,但不是 $1/n^s$ 的和,而是 n^s 上的和. 他们都有一个黎曼假设. 还有,极为重要的是,可以将它们写成素数的乘积,这对本研究是绝对至关重要的,因为有一些对象可以写成 $1/n^s$ 的和,但它们并不满足黎曼假设. 那是因为它们不能写成素数的乘积. 人们已经独立研究了 L-函数. 它们看上去都像黎曼 ζ 函数,都有一条被认为是零点所在的临界线,这些零点都有高度,可以对它们进行统计分析.”

我们开始明白,为何塞尔伯格想要 ζ 函数不扩散条约. 很难想像黎曼 ζ 函数这个复杂的四维空间区域. 在同样的四维空间里,我们现在已经发现有无穷多个别的曲面,它们都位于零点所在的海平面之下,但所处的深度彼此不同. 然而,人们相信,和黎曼 ζ 函数一样,所有的 L-函数的零点也位于临界线上. 【166】

卡茨和萨纳克并没有去观察黎曼 ζ 函数的大量零点,而是对整个函数族中的零点进行比较. 他们取每个 L-函数的第一个零点,描出从某种意义上说与传统的零点谱相垂直的一列数(如图 14).

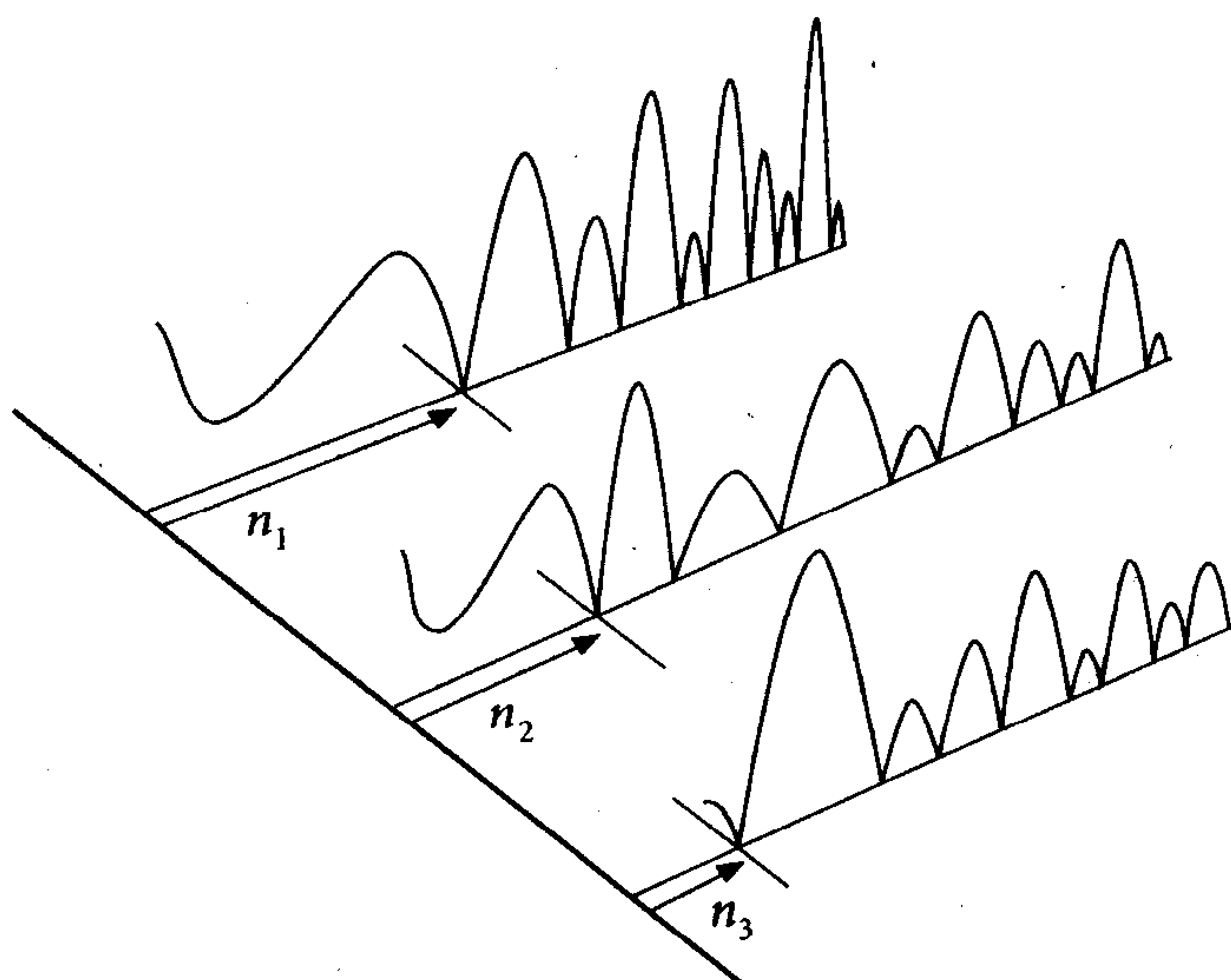


图 14 三个 L-函数在三个不同点处(数 n_1, n_2, n_3)的第一个零点.若以这种方式观察整族 L-函数,则可列出所有第一个零点位置所构成的数列,而分析该数列的性质.

"他们所发现的是,"济廷说,"有很强的迹象表明,在我们所看到的所有 L-函数族中,隐藏着异常简单的对称性.例如,每一个 L-函数(黎曼 ζ 函数是它的一个例子)都有第一个零点.它只有一个数,所以对于每一个 L-函数都有一个数,现在你观察各个 L-函数族,分析该函数族中的这些数,并对它们进行统计.他们发现,随着所取函数族的不同,你会得到不同的答案,这些答案有着十分简单的形式,与以十分简单的几何对象出现的极其简单的群相关.那是观察数 1.观察数 2 是黎曼 ζ 函数所在的函数族所具有的一种简单形式,它实际上就是经典力学中所出现的对称性." 【167】

但是,这些 L-函数到底是什么?它们是如何与黎曼 ζ 函数相关联的?这种关联是通过素数产生的.前面我们已经看到,黎

曼 ζ 函数可以用来计算小于你指定的任何一个数的素数个数. L-函数处理的是直到某个给定数的某类素数的个数. 例如,一种 L-函数与形如 $4n+1$ 的素数相关. 这种形式的数并不都是素数,但其中一些是素数:4+1=5(素数),8+1=9(不是素数),12+1=13(素数),16+1=17(素数),20+1=21(不是素数)等等. 在 21 以内,形如 $4n+1$ 的素数有 3 个,而比 21 小的素数共计 8 个. 你可以考虑许多不同的结构可能为素数,对于每一种结构,都有一个 L-函数.

当卡茨满怀信心地讲起来时,他的板书越写越快,挥手也更加频繁. 挥手在这里正好是个十分恰当的用词. 在数学界,它有两个含义. 首先,这当然指卡茨在写了满满两大块黑板的符号、草图时十分善于表达的动作. 但更重要的是,挥手刻画了一个过程,这个过程有时是在同事面前展开论证的重要一步. 在思考一系列数学步骤时,数学家并不总是有条不紊地进行. 如果他们确信某一特殊步骤成立,但还需要做一些平凡的工作才能最终确立这一步骤,他们就会跳到更有趣的下一步、再下一步. 也许,前方会有一个更大的障碍破坏他们的论证,所以为什么要把时间浪费在结果可能毫无意义的工作上呢? 一般来说,当他们的研究写成了文字,并在正式会议上宣读时,只需用必要的详细推理,所有的中间步骤都将得以填补. 在无数次擦干净然后又写满内容的黑板前面,卡茨面对的朋友——志趣相投的数学家们,他们很乐意接受挥手作为论证的重要组成部分. 当他们能随卡茨快速进入低特征值的新台阶——这是卡茨-萨纳克猜想的主题——时,他们是不愿意花更多时间去听多余的基本数学内容的. 和萨纳克一样,他们知道,挥手,尤其是在论证的前面阶段,几乎肯定可以被后面阶段的精确证明所替代.

【168】

在东方餐馆用餐完毕后,九位数学家(包括两个英国人)三句不离本行,谈论起它们的研究工作来——什么英国大学里数学家可怜的工资待遇呀,什么黎曼假设有没有可能在某人的生

前得到解决呀，什么黎曼假设证明的赌博是赢还是输呀，等等.

“嗨，我刚记起来，”桌边的一人大声叫道，“布里安·康雷还欠我一瓶酒——他和我打赌说，黎曼假设会在上个千禧年末得到解决！”

当账单送来时，大家吵着让一位数学家计算每人该出多少.“我需要除以 9”，一位来自中西部大学的数学教授说.“除以 3，然后再除以 3.”桌旁又有一个声音在喊，人群哄笑着散去.

安德鲁·格兰韦尔把我的注意引到了亨利克·艾瓦尼克演讲期间的一次争执.“你也许没听说过，因为这是艾瓦尼克无情地引发的.但是有一件事情让人很懊恼.你在考虑一个问题，获得了某些有趣的也许与大问题有关的思想，可是后来却有人说，‘15 年前我就想过了，而且获得了一模一样的结论.’于是你说：‘你在哪儿发表的？’他说，‘从未发表.’你又问：‘你在哪儿说过的？’他回答：‘哦，从未说过.’你说：‘哦，好的，那是你的选择，但对于无人知晓的东西，你不能将其归功于自己.’在亨利克的演讲中，他只是说：‘我听说别的人也做了类似的研究，但由于没有正式在刊物或其他任何我所知道的地方发表，因此我觉得有权以我自己的方式来展开结果.’他说得很中肯，因为很显然有些人把类似的思想长期尘封在抽屉里.那是他们的瞭望台——他们希望从中得到更大的结果或黎曼假设的另外某种形式——但亨利克让我坚信，这是个死胡同，他正在撰文解释为什么这是个死胡同，那是一篇很有价值的论文.”

格兰韦尔还说了一件上一年发生在他身上的奇特故事.“我第一次认识到自己有了黎曼假设弱形式的证明思想，我为此申请了国家科学基金.一位匿名评议人回信说：‘哦，罗格·希斯-布朗数年前已经试过这个方法了，结果行不通.’后来，我在一次会议上宣读我的结果时遇到了罗格——我作了进一步的深入研究，找出了为什么行不通的原因，但实际上我还发现了一些有趣的结果——所以我告诉罗格说，‘你在这个问题上做了什么研 【169】

究？有人告诉我说，你已经得到了某个结果.’他说，‘哦，没错，几年前我有了这个想法，但实际上我并没有得出什么结果.’他很诚实.接着他又说：‘我的确没有得到你这样的结果，但我有一些基本的思想，我意识到它行不通.’我对他说：‘有多少人知道这事呢？’他回答：‘我有一次去德国参加一个会议，在火车上邂逅两位分析数论家，我记得在车厢里和他们讲起过，但没有告诉过其他任何人.’评议人几乎是在谴责我剽窃罗格 15 年前在车厢里说过的思想，这事是多么令人恼火！”

这种“闭门造车”现象显然一直在困扰着数学家.在数学前沿做研究是件难事.只有当你的研究是独一无二的，那才有价值.每个画圣维克图瓦山的画家都创作出独特而有效的作品.它也许画得不怎么样，但即使有人站出来说：“哦，塞尚[1]已经画过一幅了，”它也不会因此被人贬低.但数学就不同了.

“我认为尘封在抽屉里的东西，”格兰韦尔说，“应该是你自己确信某些结果成立，但尚未完成所有的细节.当你完成了细节之后，情况就大不一样了.我曾碰到过这种情况：一次我在普林斯顿作报告，之后塞尔伯格走过来说，‘我在 1954 年第一次证明你的定理时，就是这样想的.’他向我解释了他所做的工作，那比我的视角要好得多.所以很明显，他对此了然于心.他将其尘封在抽屉里等待合适的用途，而不将其发表出来.但非同寻常的是，35 年之后他竟然还能记得某一个细节.三周前的事我就记不得了.谁知道人们关起门来在做什么呢？”

【170】

① 塞尚(Paul Cezanne,1839—1906)，法国画家，后期印象派代表人物，代表作有《玩纸牌者》、《圣维克图瓦山》等.——译者注

13. 并 非 易 事

我确信，路易斯·德·布兰奇关于黎曼假设以及其他猜想的许多“错误”证明与他对比伯巴赫猜想的证明一样充满着卓越的思想.

——多龙·策尔伯格(Doron Zeilberger)[94]

在2004年9月28日写给我的一封信中，路易斯·德·布兰奇这样写道：“黎曼假设的证明比人们所预料的要花更长的时间.我对证明方法作了修正，计划在十月份完稿.”

我已打算去他的家乡印第安纳拜访他，希望了解在繁忙的学术氛围中大学教授是如何工作的.然而，适合于他的时间只有感恩节.这个时候，大学校园里唯一能见到的人就是孤儿、外国人以及那些并不庆祝美国重要节日的吝啬鬼.路易斯·德·布兰奇对感恩节漠不关心，因此，他有空接待我.

德·布兰奇不让我在印第安纳国际机场租车——“你找不到来拉法叶的路，”他说，尽管我在美国从陌生机场去新的目的地已有30年时间了.我答应让他来机场接我.花了1小时才离开印第安纳国际机场，之后他驾车带我去了60英里远的拉法叶.为了避开高速公路，我们走了小路，有时横穿高速公路，有时与高速公路平行而驶.通过一路交谈，我了解到，即使在学期期间拜访他，我也不会看到他有多少学术活动.“假期从星期二开始，”德·布兰奇说道.“星期一我作了个报告.”“有多人前来听

你的报告?"我问道."哦,"他回答说,"只有一个学生,是个印度【171】人."在我读大学期间,一位教授作一个小时的报告,报告厅里坐满了学生.我已听说过,在美国的课堂里,常常会有几百个学生——有时人太多,影响了有效的信息交流.第二天,我去听了一堂德·布兰奇的课,他的班级要小得多.

感恩节期间的普度大学校园就像一个鬼城.我们大约在晚上八点到达,驶过昏暗的多层停车场以及在夜色中几乎分辨不出来的大学教学楼.在校园的中心,霓红灯下的面包店和咖啡屋给人以填饱肚子的微弱希望.一些小店虽然挂着"营业中"的牌子,可大门却关得严严实实.隐约有几个影子在拐角处移过,走进围墙.大多数是外国人——中国人、印度人、阿拉伯人——估计这些学生离家太远,无法回家过节,况且这个节日对他们来说也并没有什么意义.

接下来的一天就是感恩节,德·布兰奇和我走在冬日明媚的阳光里,从大学的招待所前往他的数学科学大楼里的办公室.石板路伸向远方,贴在石板上的传单和海报随处可见.见不到一个人影.附近的钟楼上提前响起了圣诞颂歌.

当我们经过德·布兰奇的停车处时,他自豪地告诉我,作为一位名教授,校方给了他专用的车位."这意味着我可以回家吃中饭了,"他说."在这之前,我在中饭时间不能离开校园,因为我回学校时已没有停车的位子了."

德·布兰奇自 1962 年起一直在普度大学工作,他觉得自己没有其他地方可去,即使是在由于对本可以成为合作者的同事产生怀疑、因而在孤独之中独自做着研究的时候.甚至他的学生(他用这个词来指他曾经教过的、现在已成为教授的人)也不再支持他的观点,在那些真的会来找他的人面前对他评头品足.

我在德·布兰奇家里吃了中饭,认识了他的妻子塔蒂亚娜和他的继子柯斯蒂亚(Kostia).在郊区,他们显得很孤单,他们

的生活方式受到德·布兰奇没完没了自我施加任务的制约.他们的电视机只能接收一个频道,除了晚上 6:30 的新闻节目(已成惯例),他们很少看别的节目.

“我们看不起更多的电视节目,”德·布兰奇说.他支付不起的是时间,而不是金钱——他的宝贵时间不能用于数学之外的事情上去.塔蒂亚娜是位画家,她对数学毫无兴趣.她曾在天文学系工作,但由于数学太难而放弃了这份工作.不知道和除了数学和被迫害之外别无它物的路易斯一起生活到底会是什么样子的? 【172】

如今到了德·布兰奇攻克黎曼假设的关键时刻.他已经到了一个关键的猜想,这个猜想挡住了他的去路,在最终完成证明之前,他必须证明这个猜想.黎曼假设光陈述一下都很难,要将不同数学家的证明方法表达出来就更难了.德·布兰奇正在做的工作集中在 ν 函数上,该函数已经伴随他近 50 年时间.不过,没有任何人认为该方法是可行的.

“我在学校念书的第二年开始直到最后一年,就听说过这个函数,”德·布兰奇说.“我知道有这样一个函数,我试图找到它,结果真的找到了.我知道它存在,我从一本书中获益,然后就真的导出了这个函数.我觉得自己取得了成就.作为一名学生,你得非常小心——你可以认为自己已经取得了成就,但实际上它已经为人所知.它影响着我后来的工作.”ν 函数在德·布兰奇证明比伯巴赫猜想时就起着重要的作用,以他当时的学识,他把这个函数看作是证明黎曼假设的重要工具.

这个函数是数学上常见的例子之一,它可以成为新思想的丰富的源泉.它是我们在配套知识 1 中已经看到的一个过程.数学家们问:“一个带有分数指数的数会是什么呢?”并没有什么显而易见的方法可用来解释 $9^{1/2}$,因为幂似乎只有在整数范围内才有意义.如果 9^7 表示 9 自乘 7 次,那么 9 自乘半次是什么意思呢? 但是推理导致了对分数次幂的解释,然后是小数次幂,甚

至是虚数次幂的解释. 这与其说是发现，倒不如说是发明——数学家把 $n^{1/2}$ 称为 n 的平方根（亦写成 $\sqrt{n}$），因为它有意义.

ν 函数有着类似的简单起源. 有一个叫做整数阶乘的表达式. n 的阶乘记为 $n!$，它表示所有小于或等于 n 的正整数相乘的结果. 所以，6 的阶乘等于 $6\times5\times4\times3\times2\times1=720$，用 $6!$ 来表示. ν 函数（记为 $\Gamma(n)$）是与阶乘的行为相类似的数学表达式. 对于整数 n，$\Gamma(n)=(n-1)!$，因此

【173】

$$\Gamma(7)=6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720.$$

该函数本身是这样构造的：用分数值甚至复数值来代替 n，得到一个有意义的结果，这些结果恰好在解析数论中有着广泛用途. 对于 n 的这类值，ν 函数可写成

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

等号后面像拉长的 S 的符号叫做积分号，这是另一个数学符号，作用是对后面的字母或数字施以某种运算. 此处，它是一类求和符号（这就是为什么 $\int$ 有点像 S）.

在设计将简单函数的作用扩充到整数之外的新函数时，有几个重要条件必须得到满足. 首先，不用说，如果把整数代入这个新函数，得到的结果应与从简单函数得出的结果一致. 因此，如果在 ν 函数的积分形式中用 7 来代替 n，其结果仍应为 $6!$，即 720. 其次，当 n 为整数时不同函数值之间的关系在 n 为非整数的情况下也应成立. 对于整数阶乘，有 $n!=n\times(n-1)!$，如 $6!=6\times5!$（换言之，$6\times5\times4\times3\times2\times1=6\times(5\times4\times3\times2\times1)$）. 因此，对于 ν 函数，也应有 $\Gamma(n)=n\Gamma(n-1)$. 就是这个简单而又深刻的函数——就像黎曼 ζ 函数本身一样——德·布兰奇相信能提供证明方法. 他自认为继承了数论中某个特殊传统，正走在一条通往黎曼假设的道路上，尽管目前没有任何其他人相信这是个可行的方法.

“它是对古典概念的一个补充，”他说，“1880 年，有人给出

了具有所需零点的函数之例.它们仅仅是从 ν 函数的因子那里构造而得,因而 ν 函数是证明黎曼假设的主要诱因.这是一个连哈代都很喜欢的方向.另外,就现代数学而言,我在和利用散射理论或光谱理论的人竞争.在这些领域里,我自己的谱理论很有效,而且我在这些领域达到了很高的水平,剩下的只是一个把它写出来并将它发表的问题."

【174】

但事实上,到了 2000 年 11 月,它仍然不仅仅是"把它写出来"的简单问题.为了完成黎曼假设的完整证明,德·布兰奇仍需修改他所需要的那个猜想的证明.

"我有了一个十分有希望的修正方法,"德·布兰奇告诉我说,"为了证明这个修正方法的正确性,我得做一些计算,但我还没有完成.这应该是件很快的事,但是在我完成计算之前,我得这样说,黎曼假设的本质是,要么它就是一切,要么它什么都不是.换句话说,没有什么部分结果可以让任何人信服,而且也很难发表.现在还有个奖金的问题,所以我不想把别人可用的信息透露出去."

路易斯和塔蒂亚娜请我吃晚饭,由于没有租车,路易斯不得不过来接我.我知道,对德·布兰奇来说,每晚的电视新闻是多么重要,由于他们在家里只能看 CBS,所以我建议他们来我旅馆房间看新闻,那里的电视机可收看到 37 个频道.塔蒂亚娜和路易斯在 6:20 分到达,大家在我的房间里坐下,我开始调台.

"你们喜欢哪个台?"我问."CNN,ABC,NBC,……"——供他们选择其他新闻节目.

"不,"路易斯说,我们最好看 CBS.我们一直在看 CBS,其他台的新闻会打断我们的连续性."塔蒂亚娜没说什么.所以我们都正襟危坐,看着本来也可以在他们自己家看的新闻节目.

晚餐后,我们谈及他得奖后,会如何处理媒体的兴趣."人们会来采访我,"他说,"但我不会接受采访.他们可以去采访那些过去指责我证明不可靠的数学家,然后把他们所说的发表出来.

【175】如果我获奖，人们会认为我很富有，但我今后就申请不到基金资助. 人人都会持有谬见.”

“但是，路易斯，”我说，“如果你有95％的把握认为记者会对你对手的言论更感兴趣，那么你对媒体发表谈话会使你有什么损失呢？无论如何，他们都会与你的对手交谈. 如果你也接受采访，至少你的观点也有机会发表出来.”

“接受采访太容易使人分散注意力.”德·布兰奇回答说，“它会妨碍我继续做研究的.”

“但如果你证明了黎曼假设，难道你不想歇一会儿吗?”

“不，当然不想，我还有更多的事要去做……”

星期五早晨，我从所住的大学俱乐部出来，到数学系去. 德·布兰奇正计划上一堂课，讲讲他需要证明的那个猜想. 他的一个学生来自印度孟买，名叫亚索万多·纳拉彦·戈希(Yashowanto Narayan Ghosh)，简称“亚索(Yasho)”. 他的主要研究方向是统计数学，但是他很喜欢德·布兰奇所研究的数论方向. 有一阵子，德·布兰奇似乎只有一两个学生. 我一开始对此感到吃惊，后来我了解到数学历史上也有类似的情形. 牛顿常常走进报告厅，发现空无一人. 他会等上一刻钟，如果仍没有人来，他就回房间去了. 李特伍德记得，他的导师巴尼斯(E. W. Barnes)有一次讲他当前的双 ν 和 ζ 函数时，台下只有他一个学生. 俄罗斯数学家马蒂亚舍维奇(Yuri Matijasevich)研究希尔伯特第十问题的证明(他最终获得成功)时，难以留住其他数学家的兴趣:“在我概述已知结果的首次会议上，只有5位逻辑学家和5位数论家参加，接着，与会人数按指数减少，不久就剩下我自己一个人了.”[95]

2000年11月24日，周五，在三面墙上挂满七块黑板的教室里，只有路易斯·德·布兰奇和亚索两人上课. 大部分时间由德·布兰奇讲，一边在黑板上写着整齐、清楚的板书. 尽管内容难以理解，看上去像是我还能设法弄懂的代数. 一个式子被分解



为另一个式子,又乘以其他的式子.有些符号很陌生,但看上去依稀就像我以前读书时遇到过的恶梦般的难题一般,其中每完成一步,你就陷入越来越复杂的境地,而你所希望的却是做下去会变简单些. 【176】

德・布兰奇不时地停下来,向后站,看着他刚刚写下的内容,显然感到有点不安.亚索插嘴指出其中的一个错误.每当这种时候,两人的对话传递着研究过程的神秘性:

"……我们得到共同的 $z-\alpha$ 和$\overline{w}-\overline{\beta}$,"德・布兰奇边说边写,"我们把它放在公分母之上,$z-\overline{w}$,$\alpha-\overline{w}$ 就在下面.在分子上是$(\alpha-\overline{w})-(z-\alpha)$……消去 α……"

"$z-\overline{w}$ ……有何不同吗……?"亚索问道,他看着黑板犹豫起来.

"是的,有不同……"德・布兰奇说,完全明白亚索没有说完的话."有个错误.z……这个应该是$\overline{w}-\overline{\beta}$.不,等等……"

"它是第一项中的不同因子吗?"亚索问道."$z-\overline{w}$ 是否应该在这儿……?"

"这是 $\alpha-\overline{w}$,$z-\alpha$……对啊,我写对的."德・布兰奇仍然觉得哪里错了."但是,哦,这里,在下面……"

"是的,"亚索说.

"……在下面我写错了,$z-\alpha$,$z-\alpha$……哦,结果不像我所预料的那样……"

"不,那是对的,是分子错了."

"哦,这个,这个……"

"分母没问题……"

"好的,$z-\overline{w}$,这样……"

"分子上的第二项——那个应该是 $z-\overline{w}$ ……"

他们似乎又回到原来的轨道上来了."好的,现在没问题了,"德・布兰奇说,"$\overline{w}$ 消去了,$z-\alpha$ 带有负号……"

对于这种奥妙的做数学的过程,让我感到惊讶的是,它是灵



感、汗水和粉笔的交融.即使是像德·布兰奇这样有才能的数学家也得确保他所写的括号都要在正确的位置上,移项时要变号,【177】该用β时就不能写α.那天,我在那儿听课时,证明过程变得越来越复杂.尽管有七大块黑板可写,但他最终还是用完了所有的空间,不得不擦去他先前的计算步骤,这意味着当他需要时已无法回头检查了.有时他必须把一个复杂的式子从一块黑板转移到另一块黑板,以防不小心擦掉了又得再抄一遍.一切都很原始.这些并非易于用文字进行加工或用计算机进行程序化之事.其中有很多笔误,亚索细致地检查着.

大约1小时后,德·布兰奇停滞不前了.他得到了一个需要放到另一项里去并代入方程的式子,但他拿不准怎样才能更好地变形,使它好用.

德·布兰奇的思维过程为亚索提供了灵感:"我觉得这种教学方式非常有效,"他告诉我说,"这是欧洲绘画大师们常常采用的教学方式——大师在创作,学生在观摩中学习!"

我开始理解德·布兰奇在解决黎曼假设时所做的工作.从某种意义上说,他和做微分方程初等问题的本科生并没有多少差别:放在腿上的纸,削尖的铅笔,一长串的符号,叉掉没用的东西,检验有无明显错误,原以为答案是$\frac{\pi}{4}$,可结果却成了与书后答案毫无关系的笨拙、冗长的小数时困惑地倒吸一口气,颓丧地感觉到哪里出了错.当这种事发生在德·布兰奇身上时——这样的事的确在2000年感恩节的那个星期发生了——不过并没有后面附有答案的书本,甚至可能根本就没有答案.数学的真实世界与给学生布置简单明了问题的数学教授的世界大相径庭.德·布兰奇担心的是,在经过过去25年的努力之后却可能走到了路的尽头.

下课后,德·布兰奇对亚索说:"我们已经完成了计算.现在的问题是看计算结果是否与所期望的相一致.我们所期望的是

完成某种论证，这种论证需要具有某种结构的对象存在，我正在看是否真的存在这种对象．从黎曼假设的角度看，ζ 函数是一种极其复杂的式子，因为存在如此多的素数．所有已完成的剩余部分是许多准备工作——有很多的思考——有很多的说法："我们想做什么？"和"用什么方法去做？"我们今天所谈论的是唯一需要做一些重要工作的一步……这里的一丁点代数知识决定了整个黎曼假设——运气好的时候，你碰巧到了这里．" 【178】

在我们去吃中饭的路上，德·布兰奇对他妻子说："塔蒂亚娜，我想开车带卡尔到城里转一转．他说他很想看看拉法叶的旧建筑．"

"我们现在就可以去，"塔蒂亚娜说，"或者饭后再去．"

"不，我们应该现在去，"德·布兰奇说，"吃饭前，我需要一点时间调整一下我的情绪．"

如果在他的研究中真的遇到了障碍，他的心情不可能好．但是驱车去拉法叶转一转是否足以改变坏心情，这很值得怀疑．但似乎真的起了作用．尽管吃饭时并没有表现出十足的兴高采烈，但他脸上挂着听天由命的快乐情绪：他也许能够证明自己解决方案中的核心猜想．如果证明不了，嗨，他和大学同事之间的一大堆问题，他的家庭开支，他的研究经费的缺乏——足以使占据他大半生的研究计划中的另一障碍显得无足轻重．

回顾走过的道路，他打了个数学家常用的登山比喻．"此时此刻真是一个令人高兴的时刻，你知道．它像狂躁性郁闷症：有时你在高处，有时你在低处．当你在高处时，把心情放平常一些，当你在低处时，把心情放轻松一些．1985 年有个猜想，它能推出黎曼假设，有一条不正确的捷径．但另一方面，从一点到另一点的想法也有某些优点——这使你向前更进一步．今年夏天，找到了另一条途径——看似很有希望，但又只是一条捷径．秋天我们意识到——亚索也在其中——我们对于一条途径的期望简直不合情理：它们有悖于实际情况，必须有一条更复杂的途径．换言 【179】

之，如果我们要攀登珠穆朗玛峰，最后一段路是非常狭窄的——对如何到达那儿我们并没有选择，而这似乎是唯一的途径，唯一可到达那里的途径，如果整个思想是正确的话.”

尽管德·布兰奇经历了足够多的大喜大悲，但他总是乐于承认这次可能会失败.“这个思想有可能四十年前一开始就是不充分的. 大多数别的数学家会说的是，从一开始这就是个谬论，所以如果我们失败了，就正好中了他们的下怀.”

正是这种情形使匈牙利数学家波利亚说过这样的话：“想要登马特峰的人应该先去看看策尔马特(Zermatt)的墓地.”

2001 年 5 月，我决定打电话给德·布兰奇. 我收到他的一封古怪的来信，里面是他母亲的自传，但我们从未提过此事，不知道他何以这么做. 他在法国度暑假，我们交谈时，他告诉我他的证明进展顺利. 显然，我在感恩节访问普度大学期间，他确实攻克了那个一直让他忧心忡忡的难题. 我们谈到我是否有可能再度去吉夫维特拜访他. 我提出，这一次我也许会呆更短的时间，一天左右.“不，多呆几天吧，”他说，“这样你就可以更深入地了解我的思想.”

那是一个我仍希望深入了解的思想. 自第一次邂逅德·布兰奇至今快有 1 年了，在这一年里，越来越清楚地显示，并没有人认真考虑过他是否可能已经证明了黎曼假设. 他意识到人们的怀疑. 的确，来自萨纳克的信件和其他人的评论清楚地表明，他的自信并没有充分的理由. 然而他却告诉我说，他的手稿在打印之中.“六月份我就应该拿到它了，”他说，“然后七月份作仔细检查，八月份把它投出去. 八月份人们不工作，所以他们不会马上就审稿，但一个月后应该开始审查.”

“你现在法国开车吗，路易斯？”我问，我估计他已经通过了笔试，拿到驾照.

“不，还没有. 我得去听更多的课，我开始觉得自己不会开车了.”

【180】

14. 临　界　线

这是一个颇费时间思考的问题，我请求你不要对我讲50分钟.

——福尔摩斯

见柯南·道尔《红发会》

没有其他场合能比一群数学家聚集在一起交流他们自己研究领域中的思想更明显地反映出现代数学的深奥. 这样的集会在上沃尔法赫的数学研究所定期召开，研究所位于德国的黑林山，离法国边境不远. 1944 年，该研究所由巴登·符腾堡州作为国际数学研究中心来创建，研究所定期资助系列数学会议. 2001 年共举办了约 40 次会议，其中大多数会议以数学研究的前沿为主题. 即使是用普通英文词汇命名的会议也极少能向非数学家传递什么信息：

- 有限群：理论与应用
- 几何刚体与双曲动力学
- 水波数学理论的新进展
- 有限群的表示
- 奇摄动问题的数值模型
- 高阶椭圆与抛物线问题
- 时效与玻璃系统（Ageing and glassy systems）
- 非交换几何

- 有限几何
- 制造与后勤中的数学方法
- 【181】 儿童画

(最后一个会议名称指的是“黎曼面上的图形”.)

2001 年 9 月 16 日,世界上许多黎曼 ζ 函数专家开始抵达该研究所,一幢坐落在沃尔法赫村庄附近的被森林覆盖的小山顶上的现代三层楼房. 载着数学家们的出租车从车站出发,越过穿着短裤、戴着花边帽子的五颜六色的行人. 那时正逢假期的末尾,沃尔法赫成了登山者的中心.

数学家们将在这里呆一周,讨论黎曼 ζ 函数及其相关函数的理论. 会议主席是本桥、马提・朱蒂拉和马丁・赫胥黎,他们都对黎曼 ζ 函数理论作出过重要贡献. 此外,赫胥黎还经常发表关于数学的五行打油诗,笔耕不辍(他很少用电脑,除非他不得不用 E-mail). 他最近的一首打油诗如下:

> 蒙哥马利使尽千方百计,
> 欲骗得零点的每一个秘密.
> 尽管此刻它让我们困惑,
> 黎曼假设,
> 不该是我们最终的目的.

数学家们抵达后都聚集在餐饮区,各自喝着咖啡或酒(“每杯 1 马克,请将钱放入木盒里). 邦比艾里以其轻微的口吻和加拿大数学家弗里兰德(John Friedlander)交谈着;本桥在与亨利克・艾瓦尼克交谈;其他来访者坐着欣赏薄雾笼罩的山林以及绵绵的细雨.

那天晚上,谁都没有真的去想数学. 纽约 911 恐怖袭击才过了五天,他们谈论的话题都是有关美国会来谁,以及谁会因为飞机禁飞而来不了;还有宾夕法尼亚飞机被击落的传闻;在客机上【182】制造密封的驾驶员座舱是否可能或是否明智,等等.

在这样的会议上存在着搞派系的危险，上沃尔法赫试图通过随机安排与会者在约 12 张餐桌上的座位来避免这种情况的发生. 因此，每次吃饭时，餐厅的安排形成了数学家们不同的随机矩阵，有些人是老朋友，而有些人则从未见过面.

研究所里洋溢着奢侈的气氛. 整洁、优雅的房间和食品都免费提供；冰箱里放着高额补贴的高档德国酒；每天下午 2:30 到 4:00 之间必有的咖啡和糕点，一张台球桌，音乐室，小健身房，还有世界上最好的数学图书馆之一. 但是在上沃尔法赫一周的核心内容是开会. 在铺着地毯、摆着皮椅子，有投影仪和六块黑板的会议厅里，每位代表报告他们目前的研究，每次报告结束时，黑板上常常写满了公式和各种式子. 落地窗的外面是山中景色，视野中几乎见不到另一座房子.

报告人用幻灯片和写在黑板上的公式来解释他们的思想，会议的氛围十分专业化. 邦比艾里报告的题目是"韦依显式的变式"，提出了一种通过证明等价命题来证明黎曼假设的方法.

"在本报告中，"邦比艾里宣称，"我想说明，要证明黎曼假设不成立，当然它实际上并不是……"听众笑了，"……就需要用到某些希尔伯特空间上哈密尔顿函数极值行为的不寻常结果."在他的演讲中，偶尔会提到素数的余数. "在无限远处不存在素数——这至少对我自己来说是显然的，"他说. 他还提到"无穷大等于无穷大"，以及"摄动和非摄动核". 在一个包含四个括号的公式里出现了个小错误，后来邦比艾里把一个希腊字母从第二个括号内移到第三个括号内，把错误纠正了过来. 如果报告人没有发现自己的错误，那么总会有人很快就指出来.

在超过规定的 1 小时报告时间 3 分钟后，邦比艾里下了结语："……这就完成了证明，它可以推出黎曼假设."

邦比艾里演讲后，一位瑞典数学家说，"也许这是证明的真正开端，"赫胥黎快速写下打油诗表达了自己的反应：

【183】

获奖者像个夜猫子，
把韦伊变式来邮寄.
我愿意和你打个赌，
这论文真的了不起，
它把核摄动排了次.

萨缪尔·帕特森报告的内容是圆问题.他在黑板上写下复杂的公式，邦比艾里说，“这不可能正确.”他看出在 Σ 之前应该有个 π.

报告当中，一位胡子像穴居矮人、名叫洛伊洛夫·布鲁格曼(Roelof Bruggeman)的荷兰数学家说：“类数为零，这一点是十分必要的.”听众异口同声大呼：“一！”

在马提·朱蒂拉报告过程中，听众了解到什么是紧密编织的群，每一群均以别的一些群作为组成成分.报告中，朱蒂拉引用了在场的本桥、艾瓦尼克、伊维克、赫胥黎和康雷的工作.

本桥在周一下午作了报告.他试图绕开一个涉及克鲁斯特曼(kloosterman)和的过程.他的演讲风格和他干净利落的板书表明他是一个熟练的、造诣极高的数学家.从前面的报告中，已经很明显看到了他对该领域的卓越贡献.他精通英语，玩弄词句，不要说是日本人，就连英国人都觉得很优雅.屏幕上写着“Kloostermania”的字样.“我要讲的是一个‘分解克鲁斯特曼和’的过程，”他带着愉快的神情说.

上沃尔法赫报告的一个特点是，报告内容总是正在进展中的工作，而不像传统的会议那样，报告人报告的都是裁减了的、枯燥的工作，在同行面前讳莫如深.在这里，每个人都十分理解论证中的大体轮廓以及尚未填入的空隙.他们宁可快马加鞭地去发现自己是否走对了路子.

讲到某一步时，本桥说，“这是最激动人心的地方——我还没有彻底完成，但我对它几乎确信无疑.”

【184】

弗里兰德作报告时，帕特森指出了一个问题. 弗里兰德停了下来，摇摇头，说："哦，也许我在这里犯了个小错误，但我不想陷入泥潭."弗里兰德写满了整整六大块黑板，其中几块写了两三遍. 他用左手奋笔疾书，习惯用右手写的听众觉得老大不舒服. "你们都能看清黑板吗？"他问听众.

"我能."邦比艾里说.

"啊，大家都能看清楚."弗里兰德说.

弗里兰德讲了整整三刻钟，最后还是陷入了困境. 为了早点讲到结论，他写得越来越快，这里砍一块，那里砍一块. 对于某个问题，他说，"这是尖型和加上艾森斯坦因型和再加上克鲁斯特曼和."在任何别的场合，需要作更多的解释，但这里的大多数人都对他所说的意思感到释然无惑.

在引用另一位数学家的结果时，他写下了"韦伊"，但读的却是"外尔".

"你说的是韦伊还是外尔？"有人问道.（由于两位数学家安德烈·韦伊和赫尔曼·外尔的存在，新近再加上一个安德鲁·怀尔斯，现代数学才变得高度复杂化.）

"外尔是他称呼自己的名字，"邦比艾里说.

"我觉得他现在不会称呼自己任何名字了."弗里兰德说. 安德烈·韦伊于 1998 年去世.

弗里兰德继续在黑板上狂写，当听众突然发笑，他转过头来问："哪里出错了吗？"实际上，他们在笑一只爬过地板的老鼠.

邦比艾里站起来，打开门. "到图书馆去！"他对那只老鼠下命令.

周二的早餐上，帕特森和赫胥黎谈起他们在剑桥求学时都知道的一些数学教师的怪癖. 其中一位教师穿着平头鞋，写字时用粉笔戳着黑板，他上下走动、边写边戳，整堂课不时地被"嗒、嗒、嗒、嗒"的声音所打断.

马丁·赫胥黎是个羞怯的人，说话犹豫，在思考你所说的话

【185】 时，习惯盯着你看，然后只字不答. 他希望而且有能力证明黎曼假设. 深入了解后，有一件事变得很清楚：可以用不止一种方式来陈述黎曼假设. “黎曼假设是个精确的陈述，”赫胥黎说，“从某种意义上说，它的含义是很清楚的，但它与什么有联系，蕴含着什么，以及来自何处，都十分不明显.”

等价的命题——如果正确的话，就能推出黎曼假设的数学命题——似乎往往与黎曼 ζ 函数很少或没有关系. 赫胥黎告诉我什么是法里分数，从这些分数中可以产生一个十分简单的等价命题. 它们是由一个名叫法里(John Farey)的英国人想出来的. 1928 年在纽约所作的一次演讲中，哈代介绍了这位名不见经传的小人物的生平细节：

> 业余数学家研究数学通常不会得出有趣的结果. 我想告诉大家一个十分奇怪的例外. 老约翰·法里先生生活在拿破仑时代，在《全国传记辞典》里有20行字①的简短介绍，他被称为地质学家……，作为地质学家，法里显然已经被人们遗忘了，如果那就是关于他的一切的话，我怀疑他是否能在今天的《全国传记辞典》中占有一席之地.
>
> 真正令人震惊的是，法里的官方传记作者竟然对他的主人公真正的功绩一无所知. 不论《全国传记辞典》怎样描写，法里都是名垂青史的；在狄克逊的《数论史》及德国数学百科全书中，他的名字占有显著的地位，没有哪位数论家不曾听说过“法里级数”这个名字.[96]

法里级数(实际上是个数列)是由 0 和 1 之间所有分母小于某数

---

① 实际上，在《全国传记辞典》中，关于老约翰·法里的条目共有 50 行，这是哈代犯算术错误的极少数例子之一. ——原注

(比如 5)的分数所构成.按从小到大的顺序写出来,就是

$$\frac{0}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1},\cdots$$

【186】

法里发现,每一个分数(除了第一个和最后一个)都可由它两边的两个分数的分子和分母分别相加而得到,如,$\frac{3}{5}$等于$\frac{1+2}{2+3}$,等等.哈代有点残忍地说:

> 法里先生一生中就这一次步入名人行列,作出了新的发现.他并不十分清楚自己在做什么,他的数学太弱了,未能对自己发现的这个非常简单的定理作出证明.显然,他也没有觉得自己在只有半页长的信上所叙述的这一发现有什么重要性……他显然并不知道他的这封十分偶然的信件是他一生中真正具有重要意义的事件.我们也许会认为法里很幸运,但一个作出了连费马和欧拉都不曾作出的发现的人,是完全值得拥有这份幸运的.[97]

马丁·赫胥黎解释了如何在 0 和 1 之间取出所有分母小于某数(如 1 000)的法里分数,并将它们按分母递增的顺序(而不是按分数递增的顺序)写出来,这样,$\frac{1}{10}$位于$\frac{1}{20}$之前,$\frac{2}{10}$,$\frac{3}{10}$,$\frac{7}{10}$也是如此.然后将这种写法与按从小到大顺序写出来的小数列进行比较.

“分数的排列顺序与小数的排列顺序完全不同,”赫胥黎说,“如果你试图将这种差异进行量化,可以写下一个叫做‘均方’的顺序,当两种顺序差异越大,均方就越小.”接着,就像从帽子里变出兔子一样,赫胥黎变出了黎曼假设:“黎曼假设说的就是这个均方尽可能地小.所以在这个背景下,黎曼假设说的是分数写成小数形式的顺序与写成$\frac{a}{b}$形式按b递增的顺序尽可能地

不同.”

在我的研究过程中,经常会有人告诉我与黎曼假设等价的不同命题(换言之,如果你能证明这些命题,那么你就证明了黎曼假设).有很多这样的命题,但没有一个比赫胥黎的等价命题更简单.

除了等价命题,还有一些命题,如果黎曼假设成立,它们也成立.彼得·萨纳克解释道:“黎曼假设是个核心问题,它蕴含着很多很多的东西.有一件事使它在今日数学中显得十分不同寻常,那就是:已经有500篇以上的论文——谁可以去数一数——都始于‘假定黎曼假设成立’,然后得出奇妙的结论.然后,这些结论便成为定理.就像这个家伙的故事,他到处说:‘我杀了9个,’实际上是用拍子打死了9只苍蝇.用这种方法你马上能证明500多个定理.”

【187】

“问题的意义在于:(a)它是核心问题;(b)它为你提供了一个极其有效的工具.这就是为什么我们如此需要它的原因之一.它将使生活变得如此容易.所以,当我想证明某件事时,我首先会去看看它是否可由黎曼假设推得,如果可以,那么我们至少相信它是正确的.”

修·蒙哥马利描述了研究黎曼假设的一个推论何以能为该假设本身提供有用的信息.“从某种意义上说,探究黎曼假设的推论是检验它的一种方式,因此,若有人想推翻它,则可先假定它成立,然后得出矛盾.在我的领域里,人们花了很长时间从黎曼假设那里推导出别的结果.我自己就有许多有条件的结果,对相关不过其中之一而已.所以我常常开玩笑说,在星期一、三、五,我无条件地、有增量地试图将已知的结果推进一点点;在星期二、四、六,我假设黎曼假设成立,试图开发出一个更大的图景.这两种活动对于推进该课题都是富有成效的.尽管有时事倍功半,但你是在开发工具,运用思想.有时突然思想对路,就取得了重要进展.”

因此，我们需要黎曼假设的等价命题以及可从黎曼假设推导出来的命题.结果有好几种不同的黎曼假设.查尔斯·梁维克仍记得他当初发现这个事实时是多么地惊讶.

“当我到达安阿伯时，”他说，“我记得第一年那儿有一次关于曲线黎曼假设的讨论班，我对此一无所知，我想，‘天哪，会有另一个吗？’所以我去听了报告，发现十分有趣.他们说还有类似的结果，这着实让我惊讶.因为这上面得到了黎曼假设”——梁维克在空中挥动着手——“其结构与这一个完全不同”——他的手在另一个地方挥动——“但接着，当你展开它的时候，你发现这个代数和分析开始相互契合，它使我产生这样一种感觉——‘在数学上，不要在把事情分割得太多，对于事情将如何发展，不要贸然作出决定.’” 【188】

“有限域上曲线的黎曼假设”是安德烈·韦伊于 1940 证明的，当时，由于他在军队里未能作述职报告而被投入监狱.梁维克描述了曲线黎曼假设和经典黎曼假设之间的关系，这个描述我一下子就听懂了，让我很着迷.

“在曲线黎曼假设中，有一堆模糊的东西，”他说着，靠向椅子，朝天花板看看以便寻找灵感.“我们只说这是一堆模糊的东西，有一个函数或映射将这堆东西变成了自身，数数这个变换中的不动点，只有有限多个.”

这里，梁维克指的是，如果你将函数用于特殊的曲线或曲面，使它作用于每一个点，将其进行系统的变换，结果大多数点将位于变换曲线上的新位置上，但有一些点，即不动点，会留在同一位置.这样的变换叫做映射.例如，你可以想像一种变换，它把椭圆沿水平方向拉长到其宽度的两倍.在这个例子中，分别位于顶端和底端的两个点，在变换之后并没有改变位置.

“好，现在你要做的是对这个映射进行迭代，”梁维克继续说，“迭代两次，数出不动点个数，迭代三次，数出不动点个数，这样迭代下去，将得到一个数列.这个数列可以用一个公式写出，

公式中是些具有一定大小的小数，若一定大小是某某，则它便是曲线黎曼假设.”

安得烈·韦伊的成就似乎就是证明“这些小数是某某”. 但是，实际的黎曼假设又是怎样的？

【189】梁维克透露了他最喜欢的证明方法：“现在，在黎曼假设身上可能会发生的是，有另一堆模糊的东西，还有一个函数把这堆东西变成了它自身. 某些东西固定不动——它可以不是点，而是直线或者某些几何图形，它们会有某种几何意义，或许是长度，或许是面积. 既然它是个连续体，那么它就不会是映射加上它的迭代，它会是一种叫做流的东西.”

我当然能够看出一系列的数——每次映射后的不动点数——是如何需要解释、需要一个法则并从韦伊那儿得到它. 现在，我也能明白，如果每一步并不产生不动点，而产生了不动线或不动面，那么，要解释被称为“流”的一系列数学对象是如何产生的，任务就难得多. 但它是如何与关于素数和黎曼 ζ 函数零点的黎曼假设联系起来的呢？

“不动点公式就是，”梁维克说，“素数理论中的显性公式，因此有这一漂亮的联系. 最终，这两者（曲线黎曼假设和经典黎曼假设）将处于同一把伞下.

“什么时候呢？”我问，因为梁维克把话说得如此直截了当.

“有一次，我和一个小伙子谈话，”他以解释的口气开始说，“我说，‘我们需要走多远才能看到结果？’他说，‘一百年可能还不够. 如果是一千年，也许它已经被遗忘了，甚至在图书馆里也找不到了.’但在将来某个时候，将会有一本书，其中黎曼假设是某个更大的定理的一个特例，但那可能已经不是第一个证明……我不知道. 像我这样的人永远也证明不了它. 找到那堆东西是件难事，怎样把它建立起来，怎样做计算——将是很有趣的事. 很多人都做过深入研究，所以你真的不能和他们竞争……”

黎曼假设是个“简单”的命题：黎曼 ζ 函数的所有零点位于

临界带中心 $x=2$ 处的一条直线上. 从黎曼假设本身出发，似乎沿着各个方向走都是有可能的. 它的触角已经伸向数学的各个领域，许多不同领域的数学家都试图找到一个有效的方法. 但进展可能极为缓慢. 【190】

马丁·赫胥黎在该领域已研究了数十年. 大部分时间里，他都在研究一个相关问题，所有的人都一致认为该问题要比黎曼假设简单得多，但它同样也提出了非常艰难的挑战. 它叫林德洛夫假设.

萨缪尔·帕特森是该主题的另一位狂热爱好者. “林德洛夫假设绝对是一个很有魅力的假设.”他说，“它似乎应该可以证明. 它比黎曼假设要简单不知多少倍. 然而，我们却一筹莫展. 我深信，要证明林德洛夫假设，马丁·赫胥黎得准备把灵魂卖给魔鬼.”

尽管证明要容易得多，但理解起来却并没有容易多少. 和黎曼假设本身一样，它可以用多种不同的方式来陈述. 它源于恩斯特·林德洛夫(Ernst Lindelöf)的工作，林德洛夫在 20 世纪初十分活跃，关于黎曼 ζ 函数在临界线上的增长率，他提出了一个结果. 林德洛夫假设的一种形式如图 15 所示，它对 $\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$ 的增长与 t 的增长进行了比较.

但该假设也可以叙述成关于我们先前见过的黎曼 ζ 函数三维“风景”的命题. 这是一张蜿蜒伸向水平面的曲面，偶尔也会在使 $\zeta(s)$ 等于 0 的点处降到海平面之下. 我们对单位长度宽、伸向无穷远处的临界带特别感兴趣，所有的零点都在这条带上. 这个带子会有波动，林德洛夫假设讲的正是它如何波动. 【191】

“临界带上发生了什么，我们还不清楚，”赫胥黎告诉我. “图像是否像纸，或像瓦楞纸板? 瓦楞纸板指的是临界带的东西方向上有相当规则的突起和槽沟. 槽沟在 ζ 函数的零点处降到海平面之下. 许多的槽沟恰好穿过临界带的一半. 林德洛夫假设说槽沟不是很高，‘风景’看上去更像一张纸. 当 $x>\frac{1}{2}$ 时它是平

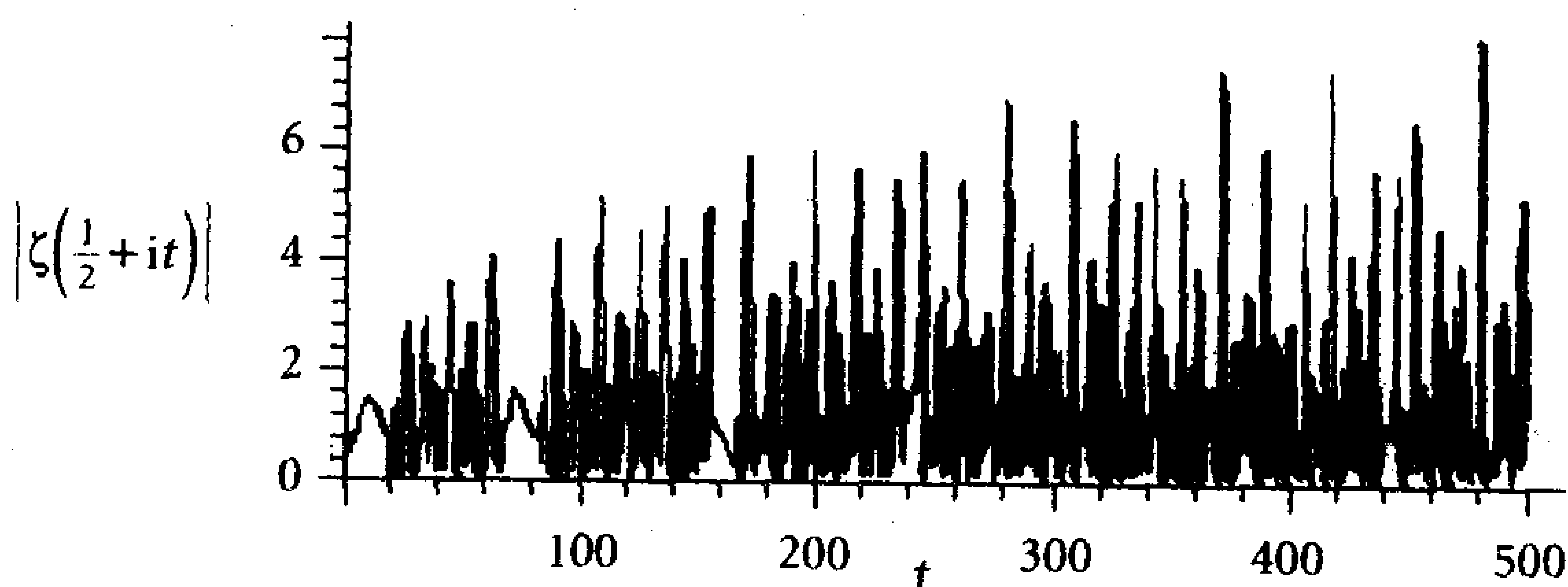


图 15 林德洛夫假设的一种形式讨论的是 ζ 的模(复数 $x+iy$ 的模为实数 $\sqrt{x^2+y^2}$). 该假设说:当 t 增大时,$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ 比 t 的任何正数次幂都增长得慢.

的,当 $x<\frac{1}{2}$ 时它是向上弯曲的(向左走时). 李特伍德证明,一旦你经过零点附近,突起部分一定变低. 所以如果临界带上所有的零点均有 $x=\frac{1}{2}$——即黎曼假设——那么'风景'在 $x>\frac{1}{2}$ 时就会变平坦(或者至多轻微波动)——即林德洛夫假设."

再次,由于本书涉及的内容很多,为了粗略了解赫胥黎和其他人关于林德洛夫假设的研究工作,我们无需担心赫胥黎陈述中的每一个细节.

我们需要知道的是测量黎曼 ζ 函数图像光滑性的数学方法.

亚历山大·伊维克是赫胥黎的朋友及同事,他对林德洛夫假设有所了解. ζ 风景的"皱纹"是用一个数学式子中一个幂的指数来度量的. 为了证明林德洛夫假设成立,必须证明指数等于 0. 伊维克以其很重的卷舌音,描述了证明该结论痛苦而又缓慢的进展.

"林德洛夫指数,"他说,"已经从哈代和李特伍德于 1915 年或 1916 年——第一次世界大战期间——所得到的 $\frac{1}{6}$(0.166 666…)下降到马丁·赫胥黎于今年得到的 0.155,共花了 85 年时间,结

果只不过小了那么一点点.现在,林德洛夫假设说该指数应该等于零,从哈代和李特伍德的$\frac{1}{6}$到赫胥黎的最新结果之间大约共有20个中间结果——这些进展并非来自于写更多页数的文章,就像你写了篇20页长的论文,然后我花半年或更多时间写出一篇更长的论文——不,不是这样发展的.每一次在第三或第四位小数上的小小改进都需要新的思想,新的观点,这或许是说明黎曼假设极其难证的最佳例子."

萨缪尔·帕特森也强调了林德洛夫假设研究的缓慢进展,尽管人们认为它比黎曼假设更容易证明. 【192】

"事实证明,它是很难解决的,"他说."部分结果并没有显示会趋向于0,$\frac{1}{6}$这个结果已经保持了80年的记录,现在的结果只是比它稍小一点点.这80多年间做了大量的研究工作,惨淡经营的一切却只获得这么一个结果.看来似乎不该再出现问题,但问题还是出现了."

尽管赫胥黎十分羞涩,但他却很愿意谈论他的黎曼假设研究工作,这在我交谈过的数学家中是很少见的,除了德·布兰奇之外.赫胥黎承认他已有了一种思想,甚至试图向我描述它的核心要素,这很可能因为我不太可能会剽窃他的思想或在回家的火车上把证明给完成了.

"我感兴趣的事情是,"他说,"在二维双曲空间上重复出现的模式,其中有一个特殊的模式与数论密切相关.由于我在学校时做了很多几何问题,我很喜欢二维空间上重复出现的模式——即使它们是在双曲空间里.双曲空间是一种向外弯曲的二维空间,就像地球表面向内弯曲一样.这是想像不出来的.

尽管赫胥黎说这难以想像,但图16却是将其直观化的尝试.它是法国数学家庞加莱设计的一种形式.对庞加莱的思想,有很多从数学上说很有趣的事情值得一提.我只举两例.该圆是 【193】

用来表示双曲空间的二维模型. 圆周代表无穷远处,所以平行线,如 a 和 b,可以在无限远处相交. 该模型中的距离并不是固定不变的. 相反,它们与点到圆心的距离有关. 离圆心越远,该空间中点的距离收缩得就越多. 当你离开圆心时,你走得越远,你的脚步就越短. 当你走向"无穷远处"时,你越靠近它,似乎越像在倒退. 但你并没有意识到这是由于你的脚步越来越短的缘故,因为你自己也在变得越来越小,你所携带的测量东西的直尺也是如此. "从某种意义上说,"赫胥黎说道,"有理数本身形成了一个向外弯曲的系统,是双曲型的."

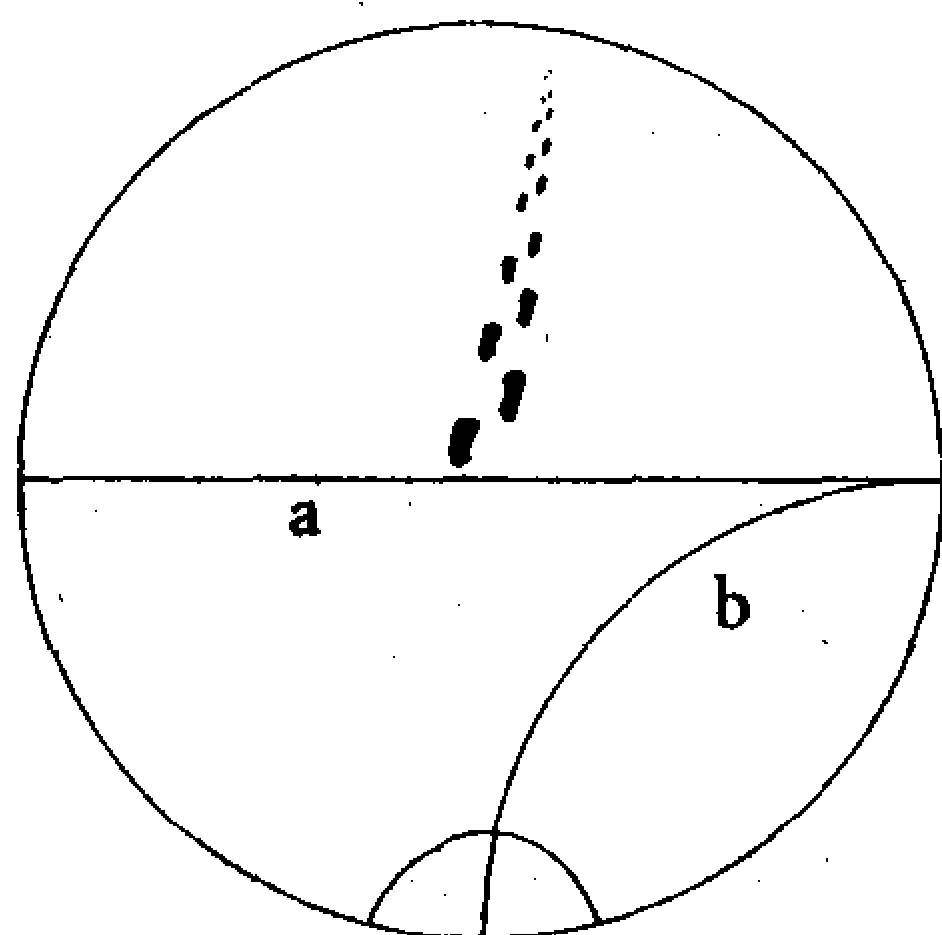


图 16　法国数学家庞加莱设计了一种有限而无界的宇宙模型. 他的圆形宇宙看上去显然是有界的,但其上支配空间的法则却有许多有趣的性质. 其中之一是物体离圆周越近,它们就变得越小. 因此,一个朝边界行走的人永远到达不了边界. 在庞加莱宇宙中,直线 a 和 b 是平行的,在无限远处相交. 底下的曲线是一条无限长的直线,其两个端点位于无限远处.

有关黎曼 ζ 函数这个极其抽象的函数的思想往往能够在几何上,特别是多维空间上找到应用. 这种应用或者通过类比,或者将数解释为空间的坐标来实现. 有了双曲空间,赫胥黎相信他已经找到了把 ζ 函数中的数值与双曲空间的三角形联系起来的方法. 与其他类型的空间一样,一个三角形是由三个点来确定的,而决定双曲空间中这些点的位置的数乃是从在法里分数形

式黎曼假设中起重要作用的数导出来的. 尽管赫胥黎相信这是一个很有前途的方法,但他不敢幻想这是否真的是所要找的思想.

“这是一个我希望会有所作为的方法,”他说,“我真得想取得一点进展,但还需更多的思想. 我指望在我的 20 种思想中,有一种是好的. 我常常要独自安静地坐上 3 小时,才会产生一种想法. 你可以在一天中的任何一个安静的时刻获得一种思想,如果因为家庭原因而不便的话,那最好将它记在一张纸上,别把纸弄丢. 如果它的确是一个好的思想,它就会不断地困扰你,直到尘埃落定.”

福尔摩斯将难题描述成“需要花三斗烟功夫思考的问题”. 对赫胥黎来说,数学上的难题则是“需要三种思想的问题”:“如果一个问题只需要一种思想,有人会去解决它. 如果问题需要两种思想,它就需要等有人同时具有这两种思想,或者,当他们有了第二种思想时还有很好的记性. 对于需要三种思想的问题,你就需要【194】有三种思想,并将它们合在一起,否则你不会有什么作为. 在这个分类背后的故事是蒙哥马利解决了我很感兴趣的需要运用三种思想的难题. 这三种思想我都想到了,可惜不是在同一时候. 所以如今,我许多论文,都冠以‘关于某某主题的愚蠢思想’之名. 我的任何一个疯狂的思想都应该写下来,并不时地去翻阅.”【195】

15. 抽象的快乐

康尼斯思想的出台引起了轰动——这部分是由康尼斯产生的，但他似乎遇到了难以逾越的障碍.

——罗格·希斯-布朗(Roger Heath-Brown)

在大众对数学的理解与数学研究的真正本质之间存在着巨大的鸿沟. 这可能是因为学校数学总是从具体的例子开始——游泳池的注水，旗杆的影子，物体沿不光滑斜坡滑下——总不外乎这些例子，至少对大多数学生来说是如此. 即使是抽象程度最低的复数主要也是作为图形来处理的，这意味着学习者从不去考虑大于二维或三维的情况. 数学的辉煌成就比人类文化的任何其他方面都更少为公众所了解. 哥德尔因他 1931 年的论文“论《数学原理》中的形式上不能确定的命题及相关系统”而获得哈佛大学的荣誉学位，述评者将他描述成“本世纪最重要的真理的发现者，这一真理对外行人来说是不可理解的，对哲学家和逻辑学家来说是革命性的.”[98] 事实上，只要花一点时间作冷静的思考，哥德尔发现的真理对于那些研读过许多通俗解释之一的外行来说，也还是可以理解的. 但是，一些数学真理对外行来说比哥德尔的真理要难理解得多.

我最近看到施瓦茨(C. Swartz)的《无穷矩阵与滑动驼峰》一书的介绍，其内容简介对没有学过研究生数学课程的人来说，几乎没有一句话能看得懂.

这些笔记给出了安托西克(P. Antosik)和米库辛斯基(J. Mikusinski)关于拓扑群上无穷矩阵的一个定理. 利用该定理以及经典滑动驼峰技术,给出了泛函分析、测度论和序列空间中各种课题上的应用. 对经典的一致有界性原理做了许多推广;特别地,利用安托西克和米库辛斯基的数列收敛和有界性的更强概念,给出了一致有界原理和巴拿赫-斯坦豪斯(Banach-Steinhaus)定理的变化形式,和通常的形式相比,这些定理不需要域空间上的完备性和桶型假设. 还给出了测度论中的尼科迪姆(Nikodym)有界和收敛定理,子列收敛的奥里茨-佩蒂斯(Orlicz-Pettis)定理、I 上弱收敛与范数收敛等价性的舒尔(Schur)引理以及连续双线性映射连续性的马祖尔-奥里茨(Mazur-Orlicz)定理. 最后,还利用矩阵定理来处理序列空间上的许多问题.[99]

【196】

一个命题始于整数和素数之间的关系,却能终于抽象领域,其中的每个小块都像施瓦茨的经典滑动驼峰笔记一样精妙,这正是由黎曼假设所产生的问题深奥精微的一个尺度.

在数学史上,以及在我交谈过的数学家中,数学似乎只有在脱离具体、上升至抽象领域,才会变得有趣. 问题是:数学家是如何喜欢上这样一种深奥学科的? 如果社会继续需要这样的人,那么如何创造并培养这种爱好呢?

如果一个有潜在数学天赋的人接触到一位好老师,那当然是有益的. 查尔斯·梁维克(托姆·阿波斯托尔的学生,布里安·康雷的老师)是一位人们公认的杰出教师,他的部分才能在于他教你东西时朴实的方式. 他是位于圣巴巴拉的南加州大学创造性研究学院唯一的数学家,穿着整洁、满头银丝、年逾花甲. 他有随意教数学的自由.

“他们只是给了自由,”他说,“实际上,说实话,大多数人对

【197】此毫不在乎.我们没有多少钱,我觉得学校把这个地方看作是个门面.他们觉得这儿无关紧要,只是个门面而已."他解释学院是如何成立的."很久以前,有人认为美国大学里的教育很糟糕,我们应该跳过这些无聊的课程,使它们变成有趣的东西.但他们未能实现这个目的.大学是个保守的地方.不管怎样,越战爆发了,校园被分割了.所以,这个家伙,这儿的文学教授马文·穆德里克([Marvin]Mudrick)和几个长期以来认为教育体制很蹩脚的人突然说:'嗨,我们可以创建一个创造性研究学院,这是我们的梦想,是我们一直在考虑的想法.'校方说:'行,可以创建.只要让学生保持安静就可以!'所以本着让学生安静的想法,他们就创建了这个学院.当时的想法是,在这儿你要让学生跳到前面去学他们感兴趣的某种模糊的混合知识——这很难说清楚.这不是另一个艺术学院,还将有数学、物理、化学……"

梁维克直率的说话方式掩盖了他所热衷的思想的抽象性.他常常用"傻的"和"东西"这样的词.他对自己的才能也颇多贬低之词.他的话让人觉得因为他对其他事都不擅长,所以只能搞数学.

"很小的时候我就开始玩弄数,但只是断断续续而已.我还有其他兴趣,我喜欢写作.实际上,在很长一段时间,我想做一名作家——我在写一部小说.这是我的另一种消遣.写完后,又把东西烧掉了.我已在网上找到了一个出版商,所以打算出版一部小说.写得很蹩脚,不过他们接受蹩脚货."他大声笑了.

梁维克过于谦虚的言谈说明了他广阔的、多方位的思维可以从一个意想不到的方向去研究数学问题,或许能以其卓越的洞察力,获得惊世之解.他是一个非传统背景下的非传统人物,热切地、执着地从那些与传统体制格格不入的学生中挑出最优秀者.创造性研究学院本身就是一个无视分门别类的机构.我了解过该学院的办学方式,它为出色的学生开设文理科的各种课【198】程.因此,我原以为能见到一幢闪闪发光、窗明几净、高耸入云的

大楼，其外观设计象征着理科与文科、音乐与数学、哲学与技术的融合.谁知，梁维克的办公室却是在看上去像太平间似的、浅棕色脏兮兮的小楼里，没有明显的入口，几扇小窗，室内摆设破破烂烂.和校园里其他一些光彩夺目的建筑相比，它显然已不再有往日的辉煌.梁维克认为，创造性研究学院已被学校现任领导层视为不合时宜、令人尴尬的地方.

尽管更传统一些的数学系试图将成批的高中生——他们中有一些甚至不会分数加法——培养成为有才能的数学家，但是，梁维克却能自由挑选很有潜力但需悉心培养的学生.他说起自己的学生时，让我想起影片《心灵捕手》[1]里那位在学校里驯服和鼓励一个数学天才的教师.但梁维克很讨厌这部影片.

“我觉得这是部很糟糕的影片，”他说.“影片并没有刻画出一个真正能作出某个发现的天才.完全愚蠢可笑、矫揉造作，我一点也不喜欢这部片子.我喜欢影片《莫扎特传》，因为我记得当萨利埃雷走进来时，莫扎特也在那里，他突然即兴演奏——托姆·胡尔斯(Tom Hulse)能够做到这一点，你才会说‘啊，这小伙子是个天才.’还有，你也看到夜深人静时莫扎特尚未就寝——他看上去很吓人，他在这张台子上写着东西，妻子对他说，“来睡吧，”他说，“不，”死神来到了门前，你真的看到了一种令人着迷的东西.所以我认为天才在《莫扎特传》中刻画得很好，而《心灵捕手》中却不是这样.”

像电影中的教师一样，梁维克时刻留心着因为不合条件而被其他大学拒之门外的聪明学生——或者甚至被他自己大学里的院系拒绝的学生.“我现在有位学生……，在他来这儿之前对他进行面试时，我就知道会有各种各样的麻烦.我的做法基本上是这样的：如果我看到他走到这儿，我从窗户上递给他一个数学问题.”梁维克指指他那拥挤的办公室的窗户.“‘嗨，鲍勃，’我会说，‘你听说过这个问题吗？’第二天，他会过来告诉我问题的解.

---

① 1990年代一部奥斯卡获奖影片.——译者注

那是我们所能做到的一切了.如果我让他进屋,他就不会去做.他很出色.前几天我给了他这样一个问题:有两人用 2 001 这个

【199】 整数做游戏——一个人取该数的一个约数,从该数中减去这个约数,于是把所得的数给另一个人.这个人取该数的一个约数,从这个数中减去约数,再把所得结果给第一个人,最后能做下去并得到 1 的人就赢了.这位学生回去吃过中饭后,回来说,'我知道怎么做了,很容易.如此这般.'现在,如果我给了他某个函数论问题,他不会去做……"

多年来,梁维克的非传统研究方法已经培养了一批数学家.一直有少数天赋异常的人找上门来,尽管他对学院的前途感到悲观."一个年轻人来创造性研究学院.我知道这事时,已不见他的踪影.我想,'这小伙子怎么了?'他已经修完集合论的高级课程——那是一门很难的研究生课程——所以这个学生回来找我,说,'这位教授不让我进他的课堂,'我说,'哦,这家伙!'于是我去找那位教授,说,'瞧,这对你有什么影响呢?''他只是个新生,'那位教授说,'他不能修我的课.'我说,'就让他来听你的课吧,好吗?'最后他同意了.四周后我和那位教授一起乘电梯下楼,他说,'你知道吗,你送来的那个小伙子现在在帮我阅卷.'可见他成绩很好,但他喜欢的只是集合论.现在他在做有关太阳系的大项目……我招的所有学生五六年后几乎都去了硅谷.他们住的地方彼此不超过 10 英里——有些已经退休,成了百万富翁."

如果黎曼假设得到了证明,那么一定是由像梁维克的学生这样的聪明、任性、充满激情的人证出来的,他们在数学的某个小领域内深入钻研,从早到晚孜孜以求,因为他们觉得这比世界上其他任何快乐都更让人心满意足.

对于许多数学家来说,从数学研究中所获得的兴奋感,要超过其他任何身心上的快感,而且持续得更长久.我们所知道的最早的数学家显然从数学中获得了很深的满足感.普鲁塔克(Plutarch)描述了阿基米德在罗马人攻克叙拉古时是如何因为陷入

一个数学问题的思索而死的：

> 一个罗马士兵手持刺刀，跑向他，扬言要杀他……阿基米德回过头来看了看，恳求他稍等一会儿，他不想让自己的研究半途而废；但这位士兵丝毫不为所动，立即杀了他.[100]

【200】

从那以后，一代又一代数学家以研究有趣的数学问题为乐. 李特伍德在 89 岁高龄时跌了一跤，住进医务室. 他的朋友贝拉·鲍洛巴斯(Bela Bollobas)试图用数学问题来让他快乐.

> 绝望之中，我提出了求布尔克霍尔德(Burkholder)弱 L_1 不等式最佳常数的问题. 让我大感欣慰(和惊讶)的是，李特伍德对这个问题产生了兴趣. 数学似乎的确有助于恢复他的精神，几周后，他离开了看护室. 从那以后，李特伍德对弱不等式保持着兴趣，并试图找出适当的构造法对上界作出改进. 遗憾的是，我们没有取得多大成功. 最终，直到李特伍德去世后，我才发表了这个改进的结果.[101]

"布尔克霍尔德的弱 L_1 不等式"听起来不太可能会是一位消沉老人的提神物，但它的确在李特伍德身上凑了效.

对于其他人来说，这种乐趣可能是很难抓住的. 除了默想或宗教等之外，我们大多数人在日常生活中都不习惯于抽象的思考. 大中学校里的年轻人当然也是如此，而下一代的数学家将从他们中间产生. 然而，我所遇到的每一位从事黎曼假设研究的数学家都能超凡脱俗，进入一个对非数学家来说毫无意义、而且实际上人类大脑似乎不可能思考的世界. 罗素如是说道：

> 适当地看来，数学不仅拥有真理，而且还拥有至高无上的美，一种冷峻的美，就像雕塑一样. 这种美无需诉诸我们柔弱的感官，没有绘画或音乐的华丽装饰，它

是绝对纯粹的,只有最伟大的艺术才能显示出的严格的完美.真正的快乐、兴奋,以及一种超乎凡人的感觉,这些乃是最高成就的试金石.这些在数学上均可找到,就像能在诗歌中找到一样.数学中的精华不仅值得作为一项任务去学习,而且值得将其作为日常思维的一【201】部分来吸收,以常新的激情呈现在大脑里.对大多数人来说,现实生活永远是现实和可能之间长期的永久性的妥协;然而,纯粹理性的世界并不知道妥协、并不知道现实的限制、并不知道体现在辉煌大厦里热切追求完美的创造性活动的障碍.远离了人类的热情,甚至远离大自然可怜的事实,一代代人逐渐创造出了有序的宇宙,在这个宇宙里,纯粹的思想仿佛居住在自然之家中,我们更高贵的动力之一可以从自然世界枯燥无味的流亡中逃脱出来.[102]

我们又一次面对远离计算的关于数学的说法.罗素所描述的数学与哲学或逻辑相像,现代数学多半如此.尽管黎曼假设的出发点是具体的数,但是构造证明所用的方法却是极其抽象的.

英国数学家、南丁格尔(Florence Nightingale)的数学老师西尔维斯特(J. J. Sylvester)因为一个学生的缘故而不得不学习新的抽象代数,但他对此无怨无悔:

如果不是这所大学里的一名学生一心要跟我学近世代数,我决不会从事这方面的研究;就我而言,我在该领域所发现的新事实和新原理(我相信,那些都是重要的事实)仍将处于酝酿之中.我劝这位好学的学生,最好选另外某个常规一些的学科,如高等微积分或椭圆函数或替换理论,或我所知道的什么学科.但他以完完全全的恭敬,但又以说服不了的执着坚持着他自己的观点.他要学习这门新代数(天晓得他是从哪儿听说的,因为

在这个洲(美洲)里几乎没有人知道它).我只好答应,结果呢?为了讲清楚课本上模糊的解释,我的大脑着了火,我以重新激发起来的热情,投入到我已经放弃数年的学科之中,寻找曾经吸引我很长时间的思想养料,这很可能要花费几个月的时间进行全身心的思索.[103]

【202】

安德烈·韦伊小时候很重地摔了一跤,他姐姐说,第一件安慰他的东西就是他的代数书.他后来写道,"每一个著名的数学家都或多或少地经历过这样的兴奋状态:一个思想奇迹般地接着另一个思想……与性的快感不同,这种感觉可以持续几个小时,甚至几天."[104]

"如果我觉得不快乐,"数学家阿尔弗雷德·伦伊(Alfred Renyi)说,"我做了数学就会快乐起来.如果我觉得快乐,我做了数学就能保持这种快乐."[105]

"突然领悟前人的秘密所产生的快乐,和突然发现迄今未知的真理所带来的快乐,对我来说都是一样的,"哈尔莫斯写道,"两者都有豁然开朗的瞬间,飘然欲仙的幻觉,以及放松之后的狂喜和兴奋."[106]

托马斯·杰弗逊(Thomas Jefferson)说,"……计算科学中,开平方和开立方是不可或缺的……,而在代数中,二次方程和对数的应用在普通的情形下是很有价值的:但除此之外都不过是一种奢侈,一种怡人的奢侈;但若是为了生计寻找职业,千万不要沉湎其中."[107]

对法国数学家阿兰·康尼斯来说,数学的快乐也同时伴随着痛苦.他谈到发现过程的四个阶段——专注、酝酿、启发和证明:

证明的过程可能会很痛苦:唯恐出错.在这四个阶段中,这个阶段的焦虑最多,因为没人知道他的直觉是否正确——恍如梦中,直觉往往是错的.记得有一次,

> 我花了一个月时间去证明一个结果：我仔细检查证明，不放过一个最小的细节，到了着魔的地步——我本可以用计算器来检查论证逻辑的. 但是一旦启发阶段开始，情感就无法保持被动或无动于衷了. 在那些我确实经历过的极少数时刻，我情不自禁地流下了眼泪.[108]

无论用什么标准来判断，阿兰·康尼斯都是世界上最聪明的数学家之一. 当然，他的许多同辈也都是这样认为的. 在研究黎曼假设的数学家中，极少有人能理解康尼斯的特殊专业，但许多人【203】认为，如果有谁证明了黎曼假设，这个人就是康尼斯. 用道格拉斯·亚当斯(Douglas Adams)的话来说，康尼斯拥有一颗行星一样大的头脑，但是，他却十分平易近人.

正是在 1996 年由美国数学研究所组织的西雅图会议上，对黎曼假设并没有特别兴趣的康尼斯被推到一些数学家认为很快能导向证明的道路之上. 此前，他一直从事的量子场理论和基本粒子的研究，他马上产生了似曾相识的感觉："我马上想到，在某种意义上说，从整数过渡到素数与从量子场理论过渡到基本粒子十分相似."

由于康尼斯和一位同事设计了一类特殊的代数来探索这种联系，因此他被邀请到西雅图宣读这方面的一篇论文. "1996 年，我应邀参加了这次会议，在那里，我作了个报告，我很惊讶于这样一个事实：就黎曼假设本身而言，除了随机矩阵方面的工作外，没有多少有用的东西. 这诱使我继续作研究. 回来后，当时正值夏天，我更深入地进行类比. 在我先前的研究中，零点根本就没有出现，但经过进一步研究，零点完全自然地出现了，我们无需定义黎曼 ζ 函数来得到零点——它们来自于纯粹的谱的解释，而对所出现的基本的新特征可以很简单地作出解释."

康尼斯所说的实际上并不十分简单——像他那样专业的数学家解释某件事情无论怎么简单，其基本的思想却是如此的抽

象,无论他所用的类比是多么通俗,到头来仍然离数学的庐山真面目十万八千里. 这就是该学科的本质.

在巴黎的一家名叫"茶罐"(Le Tea Caddy)的咖啡屋里,康尼斯显得健谈而轻松. 穿着浅蓝色汗衫和开领的衬衣,他激动地谈起数学及其在他生活中的重要性. 似乎从他能记起来的时候开始,他就对数学充满了热情.

1973 年,26 岁的阿兰 · 康尼斯在巴黎高等师范学校呈交了他的博士论文,他在算子代数方面的研究被认为是开创性的,一位评议人说,他的研究"已经取得了重要的惊人的突破".[109] 康尼斯因此获得了创造自己新型几何的盛名. 最近,他因为"在算子代数理论上的敏锐的研究,以及创立非交换几何"而获得了瑞典的克拉福德奖.[110] 2001 年 9 月,在斯德哥尔摩,瑞典国王将 500 000 美元的克拉福德奖颁给了康尼斯. 这是对于和许多纯数学内容一样很少或没有明显实用价值的研究工作的非同寻常的奖励. 【204】

康尼斯向我解释他的看法:数学具有几何与代数的两重性,他认为,这种两重性也反映在大脑的思维方式中. "几何感知是极其丰富、细致的,它与大脑的视觉领域直接相联系. 利用这些领域,你可以立即对一幅图画进行思考,并感知它的美. 例如,有一个著名的定理,即关于三角形内角三等分的莫雷(Morley)定理,如果画出图形,你会被它的美所吸引. 另一方面,如果你试图用几何图形来写出证明,往往会产生错觉. 你也许可以某种方式作图,掩盖了你用其他方式作图的事实. 结果,什么也不成立. 所以一般来讲,最终的证明,如果你需要的话,是代数的."

如今,我们很难理解代数和几何之间的联系,对早期的数学家来说是多么的出人意料. 即使是掌握了一丁点学校数学,我们都会毫不犹豫地接受这样的事实:我们可以把 x^2 和 x^3 相加. 但早期的数学家会对此感到震惊,正如康尼斯所解释的那样.

"这真是奇妙的一步,"他说,"理解一个数的平方——不过是几何上的正方形而已——和立方——不过是几何上的立方体

而已——可以加在一起，即使你会说：'一个是长度的平方，另一个是长度的立方！'不同维的东西是决不能加在一起的. 所以代数是一个惊人的成就，一旦你用代数来表达一样东西，那么它们就获得了自身的生命力."

康尼斯展开莫雷定理的例子. 该定理说，如果把任一三角形的三个内角三等分，那么，三等分线的交点将形成一个等边三角形. 如图 17 所示. 若用代数语言来描述这个问题，则须将三角形看作是含有两个未知数 x 和 y 的方程，通过 x 和 y，可以唯一确定平面上的点或直线. 所以每个顶点都有其坐标 x_1，y_1，x_2，y_2 以及 x_3，y_3，你可以用以这些坐标为未知数的等式来描述三角形的边以及三等分线. 用代数方法解出这些方程，就能证明作图中看起来很明显的结论——出现了等边三角形. 现在，取同样的方程，但加上另一个未知数 z，同样的证明仍然有效，而这时它将描述该定理在三维空间的某个形式. 加上更多的未知数，就可以进一步推广到四维、五维和六维空间，这些概念不再容易理解，但对于像康尼斯这样的数学家来说，它们有着完美的意义.

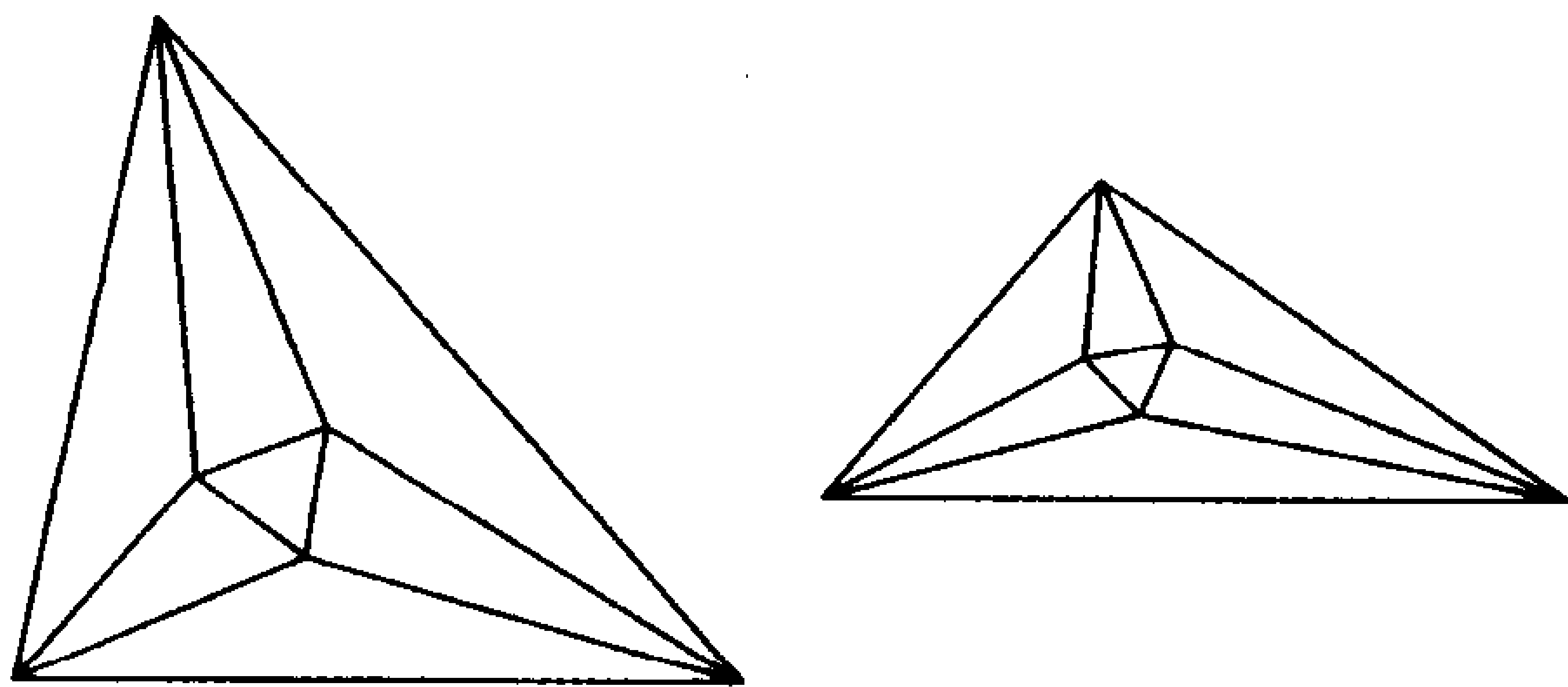


图 17 莫雷定理说，如果将任一三角形的三个内角三等分，那么三等分线的交点是一个等边三角形的三个顶点.

"同样的公式依旧可以成立，"他说，"关键的一点，几何极有助于发现结论，然后用代数方法将其公式化. 有些人说起过几何的天使与代数的魔鬼打仗，但我相信，你真正拥有的是人脑两个

半球之间的两重性——几何位于视觉领域，而代数位于语言领域．从这个意义上说，上述说法是错误的．文字的地缘相似性，正如在诗歌中一样，它们相互作用的方式，它们随着时间演进的方式，它们组合在一起的方式等等——这就是代数．当我们试图解释数学是什么，或解释一页数学内容时，困难在于，对数学家而言，一串公式是有意义的；这是数学家发挥其想像力的地方．他不会像科幻小说作者那样，将想像用于塑造疯狂的故事或诸如此类的东西——不，根本不会．他用他的想像从公式中创造心理表象．渐渐地，它们在你的大脑中开始变得有意义，即使它们不会像一幅图画那么简单，他们也会有同样类型的内在生命和动力．结果代数获得了胜利，但这并不是说你要把几何忘掉，不——几何仍在那儿支持着你，但是在某种程度上，图形离我们在日常生活环境中可以画出来的东西越来越远．” 【206】

对纯数学家来说，从二维上升到三维，三维上升到四维，四维上升到更高维，需要有多维“空间”的思想，在这种多维空间中事物存在或发生的方式和我们所熟悉的三维空间一样．如果我把指尖放在桌子上空，我可以用三个数来描述它的位置：与桌面的垂直距离，与桌子相互垂直两边的水平距离．我不明白用 4 个、5 个或 6 个数字来描述它有何意义，但像康尼斯这样的数学家可以很容易想像出来，并将某些方程进行推广，来描述一个世界，在这个世界里，就像我的三维手指在桌面上有二维投影一样，我的三维手指可以被看成另一个空间上一个四维手指的投影子．

1996 年西雅图会议一段时间后，研究黎曼假设的数学家们有一种感觉，有了康尼斯，证明就有了一线希望．康尼斯本人在组织 1998 年由美国数学研究所资助的维也纳会议时起了重要作用，会上，他报告了自己改进了的方法．

约翰·济廷尽力帮我理解康尼斯的黎曼假设方法，他不停地挥手，作了大量的类比．“他在某个空间上做研究，这个空间不

是三维空间，也不是二维空间，而是某个非常恐怖的数学抽象.那时一个源于素数的对象……”接着，济廷描述了一棵树，先有树干，再有树枝，枝又有分枝，分枝再分枝，如此直至无穷.“你可以把我们所谈论的对象——空间设想成这棵树.想想这个对象的极限：它无限错综复杂.阿兰·康尼斯让一个粒子在复杂的空间运动，这个空间由素数产生，同样在最宽松的方式下，树枝的长度与素数的对数有关.这就是素数如何介入的.”

【207】

我很喜欢树枝与对数相关的方式，但尽管济廷尽了力，康尼斯数学的抽象性仍然超出了他的解释能力.这表明了康尼斯所研究的数学的前沿性.

到 2001 年，康尼斯煞费苦心地指出，他并没有说过自己与证明近在咫尺. 约在同时，许多数学家说，不管他是否与证明近在咫尺，起码现在他肯定没有. 安德鲁·格兰韦尔就是其中之一.

“阿兰·康尼斯所做的东西——对于真正理解它的人来说——确实十分激动人心.”格兰韦尔说.“也许这家伙从一个全然可笑的角度找到了一条路子.这与多数人的想法是如此的不同.我个人未能对康尼斯的工作作出判断，但是我从对它有研究的不同人那里获得的印象是，尽管他有一些漂亮的思想，但这似乎并不意味着他达到了将使问题有转机的思想深度.他有一些漂亮的思想，有新的发现，是位杰出的数学家，他很乐观地认为，有些结果是能做出来的，但是他不是黎曼假设方面的杰出专家.当专家们开始审查康尼斯的工作时，他们意识到，或许他在用另一种语言装饰着一个在通常语言下众所周知的困难.但这并不是说他名不副实.在某种意义上，他的工作最终总会发挥出它的价值.”

关于康尼斯，不寻常的事实是，尽管他一生都在研究数学，但只是最近才接触到黎曼假设.对于许多郑重研究黎曼 ζ 函数的其他数学家——德·布兰奇、伊瓦尼克、邦比艾里、康雷、希

斯-布朗——来说，黎曼假设已经成了他们真正想继续研究下去的唯一问题. 但是后来才转过来研究它的人往往是最热情的.

"这很可能是数学上最基本的问题，它把加法与乘法交织在一起，"康尼斯说. "这是我们理解中的漏洞，因为在我们真正理解它以前，我们不能说理解了这条直线. 即使直线本身也仍然是异常神秘的." 【208】

对康尼斯来说，"直线"并不仅仅是实数线. 他所研究的是包含其他数集的直线，称作 p 进数，每个数集包含了基于不同素数的无穷多个数，所以叫 p 进数. p 进数的出人意料性质在于 p 进线上的数之间的关系. 它们之间相互接近的程度与能够整除它们的差的素数 p 的幂有关，换言之，两个 p 进数 x 和 y 彼此接近，如果它们的差 $x-y$ 能被素数 p 的很大的幂整除. 所有不同的 p 进数形成了所谓的赋值向量.

"这是一个有关我们还不理解的阿代尔线的原始问题，"康尼斯说. "这是一个加法与乘法相契合的方式问题. 它是一个基本的问题——我们还不能说它没意思而不予考虑. 像'是否有无穷多个相邻的幂，像 8 和 9(2^3 和 3^2)?'. 你可以将这些问题看成没有意义的问题而不予考虑. 但是像黎曼假设这样的问题就不能当成没有意义的问题而不予考虑了，它实际上是最基本的问题之一."

在西雅图会议之后，康尼斯对贝利和济廷的工作产生了浓厚兴趣，尤其对黎曼零点作为某个特殊谱的可行性感兴趣. 但这里有个问题. 贝利和济廷经常发现，如果他们的猜测正确，一个特殊的符号应该是正的，但实际上却是负的.

"不论你怎么修改，总是不管用，从来不管用，"康尼斯说，"但在我的研究中所产生的思想是这样的：当你试图找到光谱上的解释时，你就去找发射光谱，但物理学上的东西很多. 让我说得更具体一些：你给某种纯净化学物加热时，让发出来的光线经过一个棱锥体，然后看到谱线. 你会看到黑色背景中的一些亮



线.但结果是在物理学上还有其他光谱,比如从遥远的星球上发出的光,我们称之为吸收光谱,以及正好相反的光谱.你所得到的是各种频率的白光——除了一些暗线之外.这些暗线说明,当【209】光线穿过恒星外部大气层时,有一些化学物质吸收了它.我自己意识到零点作为光谱时,它们并不是以发射光谱出现的,而是以吸收光谱出现的.这恰好解释了贝利-济廷方法中出现的负号."

米歇尔·贝利对康尼斯的新思想很感兴趣,但并很不确信."如果你和他交谈,他会谈起吸收光谱.现在他的意思是,他觉得黎曼零点可能并不是一个系统的能级,而是如下情况:有连续的能级,但存在某些能级,无法形成状态,所以会有反级(anti-levels)、间隙,它们代表了零点.这就是他说的吸收光谱的意义.现在,我们认为这是一个形式主义的问题,一切你能写成吸收光谱的东西,也可以写成发射光谱,如果你操作正确的话.当时我们在和康尼斯讨论这个问题,但那是他的想法——它也许正确,也许错误."

康尼斯紧紧抓住黎曼假设的新方法,西雅图会议后,他花了两三年时间研究所谓的迹公式,他认为该共识可以直接导致黎曼假设的证明."我提炼了公式,检验了许多例子,发现当你只考虑有限多个素数时,公式与实际数字若合符节,但当你考虑无穷多个素数时,公式是否成立似乎就没那么容易检验了.我相信自己已经找到了一个很漂亮的框架,但这个框架仍在等待主角的出现.所以有一个舞台——已经安排得井井有条——但是我们仍在期待主角来完成它.当然,你知道的,在你实际去做以前,没有办法估计离目标有多远."

和康尼斯一起讨论高深的数学,有一种疑虑顿消的感觉.他如此煞费苦心地讲解,可你还不能全部理解他所讲内容的实质,你会觉得这简直是不合情理.他甚至说,这一切是多么的简单:"……出发点极其简单……迹公式解释起来很简单……数学上,很容易解释……"

但如果我们大多数人觉得数学公式是高深莫测的，那么，康尼斯有一个有趣的理论，为什么是这样，为什么往往不是这样. 他把看数学式子和看乐谱作了比较.“可能是我们处于这样一种情况：当人们看乐谱时，无人能‘听’音乐. 当然，少数人是能听的. 就像是一名指挥，看到乐谱时，他无需演奏就能理解它，但多数人理解不了. 对于数学，就像我们生活在一个野蛮的社会里，音乐仍处在十分早期的发展阶段，音乐对人的影响因人而异，并且音乐尚未被理解为一种语言. 显然，当你读肖邦的写得十分精确的乐谱时，你会发现，他写得如此仔细，对于交互作用考虑得如此之多，与一篇精心写成的数学论文相差无几. 很少有人能在很高的层次上去抽象地思考音乐，同样，很少有人能进行数学地思考……” 【210】【211】

16. 是发现还是发明?

我不研究哲学问题,它们太让人费解了.

——亚历山大·伊维克

经过前面十五章关于黎曼假设的阐述,现在我不得不告诉你一些坏消息.和你还有待了解的知识相比,你对黎曼假设几乎一无所知.显然,那是因为无法向你解释你不知道的东西,而你不知道的原因是无法向你解释.这种现象存在于大多数现代数学中,但这些问题之所以难,不仅仅是因为很难求出,而是因为从哲学角度来讲,数学家的思维方式非常特别,与我们的思维方式极少有共同之处.

对我来说,数学笑话最能阐明这其中的不同.举个例子说,一位拓扑学家走进一间酒吧要了一杯饮料.侍应正好是一位数论家,他回答道:"对不起,我们这里不招待拓扑学家."那位拓扑学家生气地走了出去,突然有了个主意,对自己作了德恩(Dehn)手术.她再次走进酒吧,侍应送上了喝的.当然,他并没有认出她,因为她换了个模样.然而,侍应觉得她很脸熟,至少某些地方看上去似曾相识,于是问道:"你是刚才来过这里的那位拓扑学家吗?"她回答道:"不,我是个受惊吓的结."①

① 如果你想知道什么是德恩手术——如果你真的想知道的话——它的定义是:在 S^3 中钻一个结 K 的管状邻域,并将其粘合到环面上,使得其子午线经过结外环面边界上一条 (p,q)-曲线的运算.每一紧致三维流形都产生于 S^3 中一个链环上的德恩手术.——原注

我猜这个关于拓扑学家的笑话和其他那些使用专业术语的笑话一样让人摸不着头脑.很可能还有关于某一种不知名疾病的医生的笑话,关于珍本的中世纪史专家的笑话,关于飞机零部件的飞行员的笑话.不如让我们看看另一则笑话: 【212】

2+2=5,因为 2 的值足够大.

这更加让人摸不着头脑了.至少前面有了受惊吓的结这个关键词,你可以猜测为什么对于拓扑学家来说那个笑话是有趣的.这里,我们必须进一步了解数学术语,从而了解到数学家们经常讨论 x 的较大值,关键在于 x 是变量.所以,它可以有较大或较小值,但是 2 是不变的,2 就是 2.

接下来是一些更加深奥的笑话.李特伍德写了一则他最喜欢的笑话,还加了评语,我倒觉得评语更加有趣.

校长:假设 x 代表题目中羊的数目.

学生:但是,先生,假设 x 不代表羊的数目.

(我问维特根斯坦(Wittgenstein)教授这是否是一个哲学笑话,他说是的.)[111]

安德烈·韦伊讲了一个同样具有哲学意味的真实故事,故事发生在他在美国给准备去欧洲作战的部队上课:

> 最终,我每周不得不花十四个小时,给这帮可怜的孩子们填鸭式地讲授代数和解析几何的基础知识.他们各个身着军装,并由一位军士带队.一天,他们其中一人问道:"我不明白 x 是什么东西?"问题远比他想像的要深刻得多,而我不想解释其中的原因.[112]

深刻往往是数学幽默的核心,比起其他类型的笑话更是如此.数学深刻之处对于外行人来说经常显得诙谐有趣.数学家刘易斯·卡洛尔(Lewis Carroll)深知这一点.如果有《爱丽斯梦游数学仙境》这本书的话,现代数学上的发明可能就会从这本书而来.比方说,我们已经碰上了倾斜的小丘,然后是巨大的基数,绒



毛球定理，无穷大的不同阶数(一些比另一些大). 有一种情况是一组对象的100%不一定代表所有的对象.事实上,你可以有【213】100%的对象,但还是有无数个对象没有包括在内.然后是加布里埃尔(Gabriel)角，一个三维形状有无限面积但却有有限体积的角，还有很多很多.

我们一直在探索的这个世界是什么？它是否含有人类想要发明的东西以及数学家们想要描述的稀奇古怪的概念？或者这个世界是否由于数学自身的性质而有限制呢？是幻想还是现实？是发明还是发现？

当数学家们试图描述他们的工作时,有一个比喻会不时出现,那就是拿风景作比喻.加拿大幽默大师斯蒂温·李科克①(Stephen Leacock)用这样的比喻形容他在学习数学时所遇到的困难.

> 你怎样才能简化主题？对于许多苦苦挣扎于乘法表但尚未成功的人来说,怎样才能让它容易些？平方根犹如草原中一根硬树桩那样不起眼,只有年复一年的努力才能将其拔掉.你还不能操之过急,或是越过算术直达代数.你不能用肩膀挤过二次方程,或是在二项式定理中起伏漂流.你只能另辟蹊径.你的双脚困在复杂的增长中,放慢了你的脚步,你摔倒在离二项式定理不远处,抬头却发现微积分还在遥远的地平线上.对我们每一个人来说,数学训练就这样偃旗息鼓了,尽管还在勇敢地战斗.除了一群被称为数学家的人,他们生来如此,犹如钩子一般.[113]

但是,数学家们无论是否像钩子,都比李科克要坚强得多.

---

① 李科克(stephen Leacock,1869—1944),加拿大作家,政治经济学家,写过大量随笔、幽默小品文、小说等,尤以幽默小品闻名,作品有《文学的失误》、《小镇阳光随笔》等.——译者注

很显然，数学探索的风景对他们来说具有生动且富有挑战性的真实性.当他们描述过去和现在关于自己特殊领域的研究路线时，在他们头脑中展现的仿佛就是一道充满丛林、沼泽、小径、河流、悬崖峭壁、山麓小丘和崇山峻岭的风景：

> 推敲数学难题的过程和登山前勘察峭壁的过程有惊人的相似之处.攀登之前，要从山脉、矿脉及岩石裂缝甚至是到脚趾和手指所握住的点点细节来想像、比较不同的路径.然后，慎重考虑尚未预见但有可能发生的各种可能性.每一步都得高度集中精神，预先想像、推断，完成所谓的思想实验的过程.然后，亲身去体验.[114]

【214】

> 韦姆伯(Whymper)在19世纪60年代征服马特峰之前做过七次尝试，甚至付出了队中四人生命的代价.然而，现在的游客则会因为一点点小损失而放弃攀登.他们或许没有认识到刚开始攀登时的困难.在数学领域也是如此，人们可能很难意识到现在看来如此顺理成章、如此显而易见的一小步是由何等艰辛的努力换来的.[115]

> 如果我们将数学难题比作是一块巨大的岩石，而我们想要穿透它，那么古希腊数学家们的工作就好比是锋利的切石器.而当代数学家们则好比是有经验的矿工，他们先在岩石中挖几个小道，然后放上炸药，接着一声巨响，得到了他们想要的东西.[116]

面对那么多事实，我们也许会感到奇怪，竟然可以质疑数学是否存在，就像不是由人类心智所创造出来的东西一样.这就是哲学家们研究的东西.我和牛津大学圣休(St. Hugh)学院的一位哲学家穆尔(Adrain Moore)谈论过许多或大多数数学家们的想法，他们是一群实在论者，认为数学在某种意义上存在于某处，而不在“此处”.

“反实在论者对实在论的最大担忧之一,”他解释说,“是我们如何理解这些数学实体的问题.当然,没有哪个实在论者会认为那些数字、集合像物体那样存在着.另一方面,如果你想谈论存在于“某处”的数学时,到头来必须有某种理解上的类比.我们非常清楚是什么让我们明白物体的存在.事实上,这本身就可以是科学研究的目标.你可以运用生理机能看看我们是如何开始了解实际物体的.问题是并没有令人信服的等价故事可以让你谈论数学实体,这是让人走向反实在论的原因之一.他们会说:“不,我们唯一最终能清楚看到并能理解的是数学实践本身.”用数学本身的语言才能最好地了解它,而非通过这种神秘的方式去理解某种独立的事物.

【215】

但萨缪尔·帕特森并不这么想.他只知道数学是真实存在的.“我在研究数学理论时非常清楚我研究的是已经存在的事物.两百多年前,当人们开始编制素数表时,解析数论从这个意义上已经诞生了.人们发现,尽管素数很规则,但要预测一个给定的数是否素数却很难.自然数表现得非常流畅而高雅.你可以说一个数是素数的概率大约是这个数所具有的位数的倒数,这是阐述素数定理的一种方式.从这个意义上说,这是一个实验上的发现.要解释这一现象,对于数学家这个共同体而言是一种挑战.”

在数学上,“实验上的发现”这一概念是一个很吸引人的概念.对某些你不能触及或操作的东西进行实验,用实验来检验你的理论,这听起来真是奇谈怪论.但是科学许多分支里的理论就是建立在科学家无法操作的数据之上的.达尔文适者生存的进化论是建立在对自然的观察和古化石的证据之上的.这个时间跨度是如此之大,以至于你不可能测试出任何时间段内多数生物的进化能力.同样,天文学家和宇宙学家收集现有的数据,深入研究现有数据以构建起他们的理论,利用这一理论,他们又可以检验将来可能收集到的数据.帕特森就是这样来理解探索和

解释黎曼 ζ 函数的任务的.

"这几乎就相当于你说你正试图解释某种实际事物、行星的轨道或是现实世界中其他种种现象,"他说."19 世纪末,素数定理最终得到了证明.在这个过程中,人们发现素数分布有着比人们此前所想像的还要微妙的结构.而这个微妙的结构就是黎曼所发现的,被精炼地概括为所谓的黎曼 ζ 函数的零点.所以,这是一个非常典型的发展过程——你想要解决某个具体问题,然后你发现了比眼睛所看到的更多的东西.但并非所有的问题都是如此——有些问题最终是很愚蠢的,但是有些问题,特别是素数分布问题,最终发现有比人们第一眼看到后所想像的更加精妙的结构." 【216】

马提·朱蒂拉也选用了一个天文学上的比喻:"我有时候觉得数论和那些经验科学很像,因为我们研究的都是现象.在物理学或自然科学中,研究的课题来自外部,它就摆在那里.但是数学上,主要研究课题是抽象的.数学从一无所有开始,然后有了公理和定义,接着我们证明它们成立.也许有人会认为这些都是抽象的.但是,虽然我不是一个逻辑学家,但我依然认为数系就像天文学家所研究的宇宙,在那里他发现各种各样的现象,数系有点像宇宙."

对于本桥来说,素数犹如金属灯罩般坚硬.他觉得,数学实在性问题并非那么简单."数学是人类的发明,还是独立于人类之外的真实存在,这是一个很难的问题.如果人类将彻底消失,数学会怎样?它还会是数学吗?也许只有整数才是人类心智的发明创造."

于是,他告诉我他女儿春子小时候学习自然数的一个故事."她当时并不擅长数学或算术.一天我问她:'盘子里有三块蛋糕,我放进一块蛋糕,你取走一块,还剩下几块?'她回答道:'两块.'我追问:'什么?你说什么?'我有点不安.我又问:'三块蛋糕,加一块,你再拿走一块——剩下几块?'她还是回答:'两块.'

我追问'为什么',她开始哭了,我当时很难过.她跑到她母亲那儿,解释为什么她是这样想的.日本的蛋糕很黏,如果她取走一块,另外一块会和它粘在一起.因此只剩下两块.逻辑上她是对的."

我一直认为,实在论者和反实在论者的区别在于这样的问题:外星人能否识别到素数的不寻常性质,经过推广,进一步发展数论,或许他们甚至证明了黎曼假设.宇宙科学家们当然是这么想的,他们把电波从地球发送出去,希望这些无线电讯号能够被银河系中某种文明拦截并识别.1974 年发送的一个讯号有 1 679 个信息构成.人们假设,任何与人类一样聪明的外星人都能认识到,这个数字只能用一种方式分解因子,即 73 乘 23,因而知道必须将其排列成方格,才能产生图 18 所示的图像.【217】

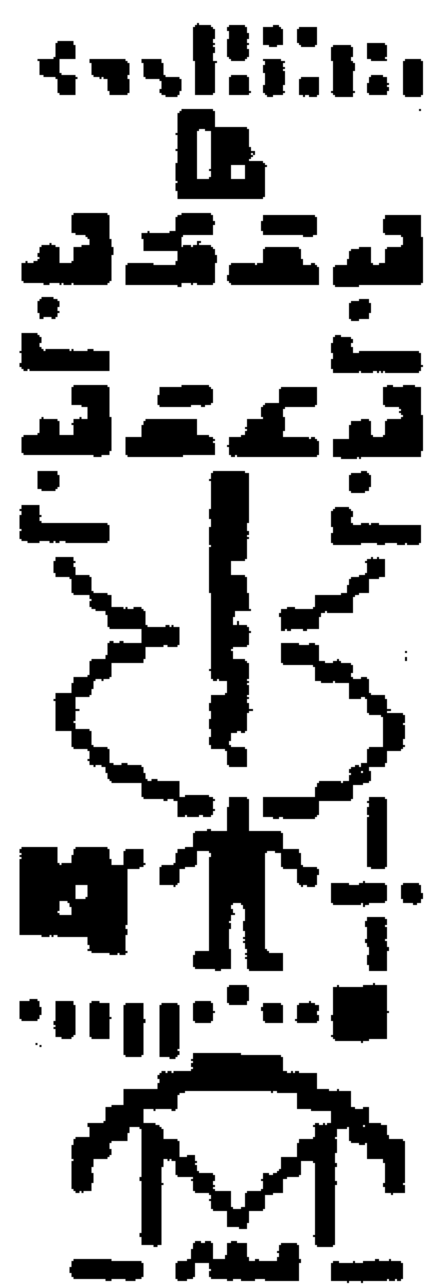


图 18 该图像被编成有 1 679 个 0 和 1 组成的带子,通过无线电波发射到宇宙空间中.人们希望任何截获这则信息的外星人能认识到 1 769 等于两个素数 73 和 23 的乘积,然后将它们排列到一个 23×73 格栅之中.如果他们这样做了,他们就会看到许多对地球人来说十分重要的概念的简化了的图形,这些概念包括原子结构、DNA、地球人口、我们在太阳系中的位置等.

“信息中所包含的图像揭示了关于我们自身和地球的许多东西,”设计讯号、满怀希望的科学家们解释说:“它显示了我们的化学组成以及身高和地球人口. 它也显示了我们的太阳系与传送这一信息的阿雷西勃(Arecibo)望远镜. 比如,中间的一对曲线代表 DNA 双螺旋.”

任何地方的人都得数数,这一点似乎很显然. 因此,过不了多久他们就会去思考素数问题. 然而,像穆尔这样的实在主义哲学家却总能绕开这种显然的现象. 他举了个人们欣赏音乐的例子.

“我们也许会遇到外星人,”他说,“他们也许不懂我们所喜欢的音乐,例如,如果你放贝多芬的音乐给他们听,对他们来说可能只是噪音. 假如他们也有五官,他们能听见音乐,但这音乐对他们来说毫无意义. 于是,我们也可能会发现他们也去听音乐会,但所听的东西对我们来说只是刺耳的噪音.” 【218】

我喜欢哲学家的地方是他们寻求类比的方式. 穆尔的例子让我思考外星人是否有可能(a)去听我们的音乐会,(b)在飞船上给自己的交响乐团腾出宝贵的空间举行他们自己特别安排的音乐会. 但穆尔接着解释了这个奇特的类比.

“我们能听懂音乐,这一点没有什么特别令人惊讶的. 我想,反实在论者会说数学也是如此. 外星人会使用对他们来说有某些用途的各种符号——说不定甚至可以帮助他们建造桥梁,谁知道呢? ——但当他们试图向我们解释这些或是我们向他们解释我们的数学时,我们双方都无法明白对方的意思.”

“以负数乘法为例. 假设他们说:‘我搞不懂你们在做什么——你们将负 3 乘以负 2[①] 得到负 6 而非正 6.’你可以想像最终那可能只是个错误. 如果事实上全体火星人都十分惊讶,但在其他方面显然非常老道,如果你是一个反实在论者,你会接受

① 原文为−3.——译者注

这一点，并说："好吧，这只是做数学的两种不同方式."

对于像阿兰·康尼斯这样坚定的实在论者来说，这些想法简直是异端邪说.事实上，他相信数学比我们很多人所认为的真实存在更加真实，不是数学包含于现实世界之中，而是现实世界包含在数学之中.

"意识到我们关于客观实在单纯的唯物主义观念其实是不可靠时，会让人感到十分惊讶，"他说，"而之后你可以坚持的唯一真实的东西却更加抽象.就让我举个具体的例子吧.拿一个人来说，经过许多年后，他身上绝大多数细胞都已经完全被替换，那他是谁呢？他只是细胞的集合吗？当然不是，因为精确地说，这些细胞都被替换了.但是他是谁这个问题就不同了.这是一个图式，唯一相关的是图式，是组织.量子力学在这方面尤为突出，因为它清楚地表明，即使你试图坚持客观物质是真实存在的，你会发现，一旦你变成足够小的时候，那么从量子学的角度上精确地讲，你也会变，所以你不能把它们当作是终极存在的东西."【219】

康尼斯激烈的实在论来自于对深刻的数学"实在"的体验.但我惊讶地发现，同样体验过数论深刻性的亨利克·艾瓦尼克却有着不同的感受.

"我认为数学是发明出来的，"他说："我知道我说过：'我们拥有这些漂亮的东西，''我们困在这儿'，或是'我们困在其他任何一个方向上'，或者我说：'你知道必有某些力量控制着这一切.'但我想这只是个玩笑——一切都是我们发明出来的."

于是，我问他有关外来智慧的问题——他们有不同于我们的数学吗？

"是的，"艾瓦尼克坚定地回答.

"他们不会有素数吧？"我问.

"啊，这个？"他犹豫了一会儿."很可能没有.我不喜欢科幻小说，没读过多少，但应该是没有."

但是对于一些研究黎曼假设的数学家，这种论点会使他们高兴不起来."我从来没有想过这些问题,"彼得·萨纳克说:"我们知道我们追求的是什么，我们是实干型的.当你在第一线时，你不会去担心数是否真实，或者它们对你意味着什么."接着，萨纳克认真思考了片刻:"我觉得在许多证明中你可以说我们发现了它们，但是我们试图证明的东西乃是上帝赐予的."

亚历山大·伊维克是个高个头、声音低沉的塞尔维亚人.他只说:"这是一个哲学问题.坦率地说，我不研究哲学问题，它们太让人费解了."

对于许多讨论这些问题的人来说，关于数学实在性最有影响力的论据是这样的事实:数学可以对现实世界作出正确的描述，并应用于科学.然而，必须指出，这并不是大多数数学家的原始动机.就像下面这则欧几里得的故事所暗示的那样:

> 有一个刚开始向欧几里得学几何的人，当他学完第一个命题后就问欧几里得:"学习这些我能得到什么呢?"欧几里得听了以后就吩咐他的奴仆:"给他三便士，因为他想从所学的东西中赚到点什么."[117]

同样，对于一些人认为需要以数学的实际应用为理由来证明数学有效性的想法，阿基米德嗤之以鼻: 【220】

> 尽管阿基米德的军用工程发明取得巨大的成功，普鲁塔克说,"他并不屑于死后留下这方面的任何著作.相反，他把一切工程类的事情，以及任何一种纯粹以实用和功利为目的的艺术都视为下三滥，而将自己全部的情感和雄心投入到那更加纯粹的、与世俗生活需要毫无关系的思索之中."[118]

然而，由于"数学在自然科学中不可思议的有效性"[119]，无论数学家们为了问题本身的乐趣而研究何种数学主题，他们最终

都将给出对于现实世界的某些描述，或具有某种实际应用. 当爱因斯坦试图解释 20 世纪早期物理学上某些观察到的现象时，他利用了数年前发现的一个完全“无用”的数学领域. 1907 年，赫尔曼·闵可夫斯基（Hermann Minkowski）发明了联系“时空连续性体”中的时间和空间的理论. 后来，当爱因斯坦需要一个符合所观察到的那些现象的数学理论时，他发现，闵可夫斯基的几何学正是为他而特制的. 有理由认为，如果当时没有闵可夫斯基的思想，相对论也就不会诞生.

黎曼假设的历史要比闵可夫斯基的时空理论更加悠久，可尚未发现有哪个爱因斯坦式的天才将其转化为核电站或是原子弹. 但是，如果黎曼假设所引发的研究以及因之而产生的新数学领域在将来未能导致我们理解世界方式上的进步，这就让人感到奇怪了.

安德鲁·格兰韦尔给我举了个数论的例子. 数论源于人们对整数及其行为的着迷，而今却有了意想不到的实际应用. 他指着我用来录下采访过程的录音机.

“这个录音设备里头就有数论. 他能精确复制声音，原因就在于它有纠错码，而这正是初等组合数论的一大应用. 这个思想早在 10 至 15 年前被用于 CD 的开发上，现在用于所有的电子录音设备上. 一年以后，如果你拿起手机给家里打电话，那时你的手机可以同时将你的声音编码，而这就是由数论的方法完成的.”

【221】

任何编码系统必须平衡两个相反的压力，那就是对于合法的接收者，解码要尽可能地简单，而对于其他任何人，解码要尽可能地难. 一个叫做 RSA 的系统（以该系统发明者名字的首字母命名）就建立在一个很大数的基础之上，这个大数是两个很大的素数的乘积. 你只有知道这两个素数才可能破译密码，而将庞大的数分解因子是一件十分耗时的事.

自从 1977 年该系统发表以来，数学家们一直在寻找分解越来越大的数的更快速的方法. 例如，1994 年，人们把最好的素因

数分解方法用于一个 129 位的大数. 整个分解过程花去相当于一台每秒接受一百万条指令的计算机工作 8 000 年的时间. 大部分的工作由 1 600 台电脑并行完成. 然而,即便如此,分解一个长达 129 位的数字要花费一个间谍很长的时间,等到密码被破译时,信息很可能已经过时了. 但是电脑速度更快,129 位长的数字很快就显得太小了. 1999 年,检验了 155 位长的数字(比 129 位长的数字大了 100 000 000 000 000 000 000 000 000 倍),分解过程花去了 35 年多的计算机时间,但由于有多台电脑并行作业,每台计算机实际用时不到四个月.

随着电脑运行速度的加快,储存能力的增强,密码专家不得不设计出更好的编码方法,而这些方法有赖于越来越复杂数学方法的发现,而其中一些方法就源于黎曼假设.

"一个有趣的数学问题就是设计一个运行惊人快速的编码系统,"格兰韦尔如是说:"正在研究这一问题的数学家们试图重新发明密码体系背后的数论. 我的加入只是出于学术兴趣,但我相信,最好的实验计划所需的经费要在每年十亿到一百亿之间. 所以,这是一大笔钱,但在某种程度上让人感到高兴的是,它给了你一个有趣的数学难题去思考. 现在,我不反对研究对现实世界有重要意义的难题. 但我并不认为每个人的初衷都是如此,他们围着难题乱转,发现了什么后嚷道:'我要发财了!'然后他们试图找到可以让他们有钱的投机资本家." 【222】

如果没有证明或推翻黎曼假设,任何研究黎曼假设的数学家休想得到克雷奖或是每年十亿美元大馅饼的一小片. 2002 年伊始,只有一个数学家公开宣布他快要完成证明. 我们能猜出那是谁. 【223】

17. 它到底是什么？

如果仅仅需要一种技巧就能证明它，那将是一个悲剧.

——阿兰·康尼斯

艾略特①(T. S. Eliot)的遗孀瓦莱丽·艾略特(Valerie Eliot)曾给伦敦《泰晤士报》写了如下这封信：

> 我的丈夫艾略特总喜欢讲述一天晚上他多晚才叫到一辆出租车.他上车后，司机说："你是艾略特."问及他是如何知道的，司机回答："噢，我可注意名人了.几天前的一个晚上我载了罗素，我问他，'尊敬的罗素先生，它到底是什么呢？'你知道吗，他竟然答不出."

对于黎曼假设，"它到底是什么？"是我一直试图用很多不同方法来回答的问题，不过读过本书的出租车司机也许仍然觉得我并没有告诉他(或她)答案.但是，我不能光靠写一本书来教会任何人开车，虽然也许我可以告诉他们发动机是如何工作的，在一个阳光明媚的日子里在乡间飙车是多么有趣，以及如果你会开车的话你可以游览多少名胜风景.

---

① 艾略特(T. S. Eliot，1888—1965)，英国诗人、剧作家和文学评论家，代表诗作有《荒原》、《四个四重奏》等，1948年获诺贝尔文学奖.——译者注

所以，有必要总结一下导出这一著名数学命题过程中的某些步骤，并澄清数学家们在试图证明它时，究竟处于什么位置.

黎曼假设很重要，因为如果它成立，那么它将证明，存在一个生成素数——其他一切数的基本材料——的法则. 目前，我们都不能证明这一法则是否有效. 如果你去观察素数在无限长的整数列中所处的位置，你会发现似乎没有什么模式可循——它们的分布看起来是随机的. 但黎曼确定了一个数学函数，今称黎曼 ζ 函数，它与素数的无限集合密切相关，并产生了另一个无限集合，及函数零点的集合. 如果那些零点都按照黎曼所认为的方式来表现，那么我们就能够精确地描述素数在直到无穷的道路上究竟是如何分布的. 【224】

高斯已经发现，如果你以某种方式把小于一个给定数的所有素数绘成图像，那么它将增长得相当平稳. 但实际的值都在这条平稳上升的曲线附近上下波动. 如果你忽略递增的结果，而只观察上下波动，你会发现，它们就像是管弦乐中的众音，而每一个零点则为这一复杂的波提供一个元素——一个纯音调，所加的零点("音调")越多，整个零点图像就越接近于素数的波动. 如果加入无限多个零点，那么曲线就与无限多个素数的图像相拟合. 就像安德鲁·奥德莱茨科对我所说的，"所有的零点共同决定了所有的素数，反之亦然."

黎曼 ζ 函数是一个涉及素数的幂和一个未知量(通常用 s 表示)的数学表达式. 如果你用某些数来代替 s，则整个式子将等于零(就像用 2 代替 s 时 s^2-4 等于零一样). 使黎曼 ζ 函数等于零的 s 值都是复数——由两部分 a 和 b 组成的数. 第一部分 a 称为 s 的实部，第二部分 b 称为 s 的虚部，因为 b 要和 i 相乘，i 表示 -1 的平方根. 虽然你可以将任何你能想像出来的复数(a 和 b 取任意值)代入黎曼 ζ 函数中，但已找到的使黎曼 ζ 函数等于零的复数，其实部 a 均等于 $\frac{1}{2}$. 由于我们可以将形如 $a+ib$ 的

数表示为图像中距离一条轴 a 个单位、距离另一条轴 b 个单位的点，因此所有 a 等于 $\frac{1}{2}$ 的数都位于距离一条轴半个单位、伸向无穷远处的同一条直线上.

一个类比也许可以帮助理解这一点. 有一位黎曼先生在 ζ 银行有一个账户. 和大多数人一样，他的银行账户有时有余额，有时透支，偶尔两者都不是——此时里面没有一分钱. 也和多数人一样，黎曼有一份收入，也有开支. 他的账户是否收支平衡取决于从取款——存折的提取或直接建立的借项——和储蓄——雇主所发的薪水，加上一位未婚姑妈偶尔给的现金礼物，或者偶尔赌赛马所赢得的钱.

【225】 多年后，黎曼先生的业务产生了一大堆其账户每小时波动情况的结算单. ζ 银行的工作非常仔细，希望能准确地确定黎曼先生每一时刻帐户的收支平衡情况. 有一位对此感兴趣的观察员恰巧是一位名叫堤池马什的税务稽查员. 一天，他无聊地翻阅这些结算单时，惊奇地发现黎曼先生在 ζ 银行的账户恰好有达到零平衡时刻——既无余款也未透支. 这种情况似乎发生在某些星期三的中午 12 点. 但并不是所有的星期三都会发生，甚至不是特定时间区间内所有的星期三. 他只发现，黎曼的 ζ 银行账户达到零平衡只发生在星期三中午.

这看起来相当可疑（但当时税务稽查员感到十分怀疑——他不相信任何人）. 所以堤池马什拿到了所有的结算单，花了多年的心血，验证他的假设. 确实无疑，他所能找到的所有黎曼 ζ 零点都只出现在星期三的中午. 但是，当他更仔细地观察黎曼收支规律后，他发现了为何零点只出现在星期三的原因. 黎曼的收支账单的交易时间，连同黎曼懒散的生活方式——他大部分时间都呆在床上，只是偶尔在星期三才振作一次——这意味着他所有的交易只能在星期三发生，所以收支达到零平衡时的时间总是在星期三. 到目前为止，一切进展顺利. 但为什么那些零点

只在正午出现呢?

堤池马什想要确定他的结论是对的,所以他雇了一个助手,一个名叫奥德莱斯科的巡游的波兰会计,来对这些文件做一个彻底的调查研究.日复一日,奥德莱斯科检查着这些零点出现时间之谜.除了某些所谓的"临界时刻",它们的分布似乎毫无规律可言.你永远不会知道在哪个星期里能找到零点;但当它真的出现时,你却能证明为什么它必须在星期三出现;但你却不知道它为何总在正午出现.在奥德莱斯科心里有个信念,经过足够长时间的观察,他就有可能在其他某个地方找到一个零点.他知道它决不会出现在一个星期里的其他任何一天,但是如果说它在上午10:13或者下午6:22出现,就会让堤池马什感到困惑,但奥德莱斯科将会很乐意这么做,因为他认为堤池马什付给他的钱并不足以补偿他这么长的工作时间以及视力上的疲劳. 【226】

以上我们试图描述数学家们开始认真计算零点以来整个20世纪黎曼假设的研究状况.黎曼本人(相当于我们的黎曼先生,银行的客户)证明,他的函数(ζ银行账户)的前几个零点都落在一条狭带上(仅仅出现在星期三).他怀疑,这些零点只出现在该狭带上一条名叫临界线的特定直线上(在中午).但他却未能作出证明.自此,每个数学家都遇到类似的情况,尽管人们(主要是安德鲁·奥德莱斯科)千方百计去计算更多的零点,而所得到的所有零点都位于这条临界线上.

所以,目标已经很明确了——证明黎曼假设就是证明一个特殊函数的一系列值位于一条特殊直线上.为了证明这个结果,一些数学家去寻找另一条直线并将其移动,使其与临界线重合;另一些数学家去寻找随机矩阵,用其相关特征值来精确地复制黎曼零点;还有一些数学家则去寻找这样一种函数,若反复将其用于一条或一组曲线,则产生不同个数的不动点.来自越来越多不同领域的数学家们一再努力地去设计黎曼ζ函数,但所用途径都截然不同.

“有时候我觉得除了一个缺口之外，我们基本上已经有了黎曼假设的一个完整证明，”修·蒙哥马利对我说.“问题就在于，这个缺口正好出现在一开始的地方，所以很难填补这个缺口，因为你没有看到它的另一侧是什么.”

彼得·萨纳克自称是个乐天派，但他说话时却像个悲观主义者.“这里，一个很大的差别之一就是我们并不是在彼此竞争，而实际上是在和人类所能做的事竞争.我们不知道这个问题人类是否现在就能解决——我个人认为，这意味着还有很多事情有待于解决.一些事情才开始就绪.当然，我是一个乐观主义者.我希望这个问题在未来的 10 至 20 年内得到解决，到那时我们可以回过头来说，“现在我们终于明白，为什么缺少这种进展和那种进展，问题就不可能得到解决.”

塞尔伯格是世界公认的黎曼假设方面的老前辈，他在美国数学研究所帕洛阿图专题研讨会上对我说，“到了我这个年纪，【227】我很怀疑我能否看到问题的解决.还不止如此，这个问题已经经历了一个半世纪之久，经历两个世纪才能解决，亦非不可能.有可能与会者中无人能在有生之年见到它的解决.”

牛津大学的数学家罗格·希斯-布朗如是说:“也许最有趣的事情是近几年来人们对黎曼假设的兴趣再度增加——不管是外行人，还是专家以及来自其他领域的数学家.不再只有解析数论家关注这个问题，所有数学家都知道它.很多人意识到，也许他们能提供很多有用的思想.依我看来，与数论家一样，概率论专家、几何学家或数学物理学家均有可能解决黎曼假设.”

在本桥看来，黎曼假设很可能是成立的，但他也做好了它可能不成立的心理准备.“如果黎曼假设在几年之内得到证明——或被推翻，尽管其可能性要小得多——我不会感到惊奇，我的意思是说，黎曼假设的解决并不需要我们的数学思维发生根本的变化，也就是说，攻克它的所有工具都已具备，只不过还缺少一种敏锐的思想而已.”

亨利克·艾瓦尼克不相信当今世上有什么人有令人信服的计划."不要太在意一个完整的证明,只要有一个计划,一个进入的方向即可.有很多类似的结果,人们试图通过类比来寻找,这很有趣,但我不知道为什么要通过类比……我并不确信."

但是有一件事情艾瓦尼克觉得非常肯定:"大自然母亲有这样美丽的和谐,所以你不能说那样的事是不正确的."

但也有可能.少数数学家做好了心理准备,有一两个甚至认为它是有可能的.当然,不成立要比成立更容易证明.只要有一个黎曼零点不在临界线上,就能使那些试图证明其正确性的人的希望彻底破灭.

理论上还有第三种可能性.数学上有一种命题,在任何形式系统中是无法确定的.如果该原理适用于黎曼假设,它将意味着永远无法证明该假设肯定成立或肯定不成立.永远无法证明黎曼假设肯定成立或肯定不成立,按照哥德尔定理,这一命题本身可能是成立的,尽管无人相信这种情况,亚历山大·伊维克更不相信. 【228】

"很坚信黎曼假设并非无法确定,"他说,"否则整个古典分析都将崩溃.古典分析使这个世界运转——利用它,桥梁才能建成,飞机才能飞行,电流才能流动,塑料才能制出——所以,黎曼假设在一种数学里不成立,而在另一种数学里却成立,就像平行公理与非欧几何一样,那将是不可思议的.我无法想像,一件事情在一个宇宙中是错误的,而在另一个宇宙中却是正确的.我不是哲学家——我是一个实干的数学家,我希望有理有据."

伊维克思考着一个有时会被人问起的问题,即他是否相信黎曼假设."这又不是宗教,"他说,"你可以信仰上帝,印度教则相信轮回转世.而我是塞尔维亚正统教教徒,我的宗教不信仰轮回转世,基督教也不相信轮回.然而,当我和印度人讨论这个话题时,我十分谨慎.因为我究竟知道些什么呢?也许如果我说我不相信轮回,我来生会变成一只兔子,天晓得.我不能武断地说

谁错了.一定有人是错的,不论是我们,他们抑或大家都不对……,或许轮回转世问题是无法确定的.所以我既不相信、也不怀疑黎曼假设.我有一些数据和一些事实.这些事实肯定地告诉我问题还没有得到解决.在被解决以前,它只是个假设,就这样.我很希望黎曼假设是成立的,就像任何一个正派的数学家一样,因为它是一件美丽之物,优雅之物,能简化很多证明之物……但仅此而已."

然而,尽管有能力证明黎曼假设的二、三十位数学家挣扎于挫折和不确定的氛围之中,路易斯·德·布兰奇却有着他人所没有的自信.自 2000 年 11 月以来,他在自己所教的泛函分析课上招到了更多的学生,共有六个,而不仅仅只是忠实的亚索

【229】一人了.

"和人谈话太棒了,"他说."他们说,'这个我不懂,'或显然我并不懂,然后我们谈论它,最后我终于明白我本应明白的东西!"

同时,他继续研究他的证明.2001 年秋我和他谈话时,他刚给在波尔多的尼科莱·尼科尔斯基寄去一份手稿.但这并不是他的最终结果,更多的则是表明,他的方法使尼科尔斯基能够为他申请国家科学基金提供独立的鉴定.德·布兰奇再度去法国需要这笔经费.

2002 年春,德·布兰奇收到了他的申请结果.整个评审组名单是不公开的.评审组分别划定等级,从很好到好到一般.其中有两人根本就没有给他的申请项目划定等级.但最后的裁决是毫无余地的"不".国家科学基金会说,他的申请"在目前的资助环境下不具备竞争性."评议德·布兰奇申请书的数学家们所给出的评论各有不同的口吻,从勉强的仁慈到微微的尖刻.

一位评议人写道:"项目负责人因解决比伯巴赫猜想而著称,在对过去研究工作的介绍中,提到了黎曼假设和不变子空间问题的解法(目前尚未发表).我对此并不十分了解,无法评论它

的正确性.但如果正确,那将是最为引人注目的成就.项目本身简要描述了与黎曼假设相关的问题以及在该背景下评论比伯巴赫猜想证明的必要性……似乎不可能对项目负责人有关黎曼假设的说法作出评价……目前,不宜给予资助."

另一位评议人说,"德·布兰奇过去已经多次声称自己解决了黎曼假设和不变子空间问题,但他的证明最终都是有缺陷的.没有证据显示他现在的证明更有效.他最新近的被《数学评论》收录的论文发表于 1994 年.建议不予资助."

第三个评议人尽管把项目评为"好",但却这样写道:"十二年多以来,作者一直在炮制论文,声称证明了这个难题……本项目表明,他的黎曼假设系列有了 2001 年版.我没有看到过这个版本.项目申请人在比伯巴赫猜想上的工作绝对出色.正是因为这项工作,人们才会照顾性地去考虑他不断给出的未解大难题的解法.必须钦佩他解决这些难题的勇气(毕竟,这是解决它们的必要条件).但另一方面,鉴于他的错误记录,他期望人们会花时间去验证他的工作是不合情理的." 【230】

"这或许是我评议过的最有争议的项目了,"另一个评议人说."路易斯·德·布兰奇因证明了比伯巴赫猜想而闻名,所以拒绝给他国家科学基金资助让人觉得不快.但另一方面,本项目并未提供充分的证据确保研究的成功甚至是重要的进展."

对于上述评论,我的解释是,德·布兰奇将自己的工作叙述得太简略了,这使得评审小组轻易地否定了他的申请,尽管他知道评审小组能在网上看到更详尽的叙述.面对很多其他更年轻数学家们的内容更详尽的申请报告,面对完全列出来供评审小组看的数学工作,评审组将德·布兰奇粗糙的申请书视为"没有竞争性"而予以拒绝,就几乎是不可避免的了.

尽管没有得到国家科学基金的资助,德·布兰奇还是于 2002 年 5 月去了法国,他在巴黎庞加莱研究所作了两场专题报告,介绍了自己的思想.他给我写了封信,和往常一样是手写的,

告诉我5月13日第一场报告的情况.

> “为我的演讲精心准备了三大块电动黑板.我用法语报告……塔蒂亚娜后来告诉我说,我讲法语时声音不如讲英语宏亮.但由于听众少,完全听得清楚.”(当时有9位数学家在场)

和往常一样,德·布兰奇希望听众们能做些什么.“验证工作对熟悉整函数希尔伯特空间理论的人来说应该没有什么困难,”他写道.“然而,问题是与会者不熟悉希尔伯特空间,对这些特殊空间就更不熟悉了.讨论会只有先学习必要的知识,才能验证黎曼假设证明的正确性……如果讨论会愿意作出必需的努【231】力,那么验证工作需要几个星期才能完成.”

5月27日,德·布兰奇作了第二场专题报告,我听了这场报告.庞加莱研究所的演讲厅是一个宽敞的两层楼高的大礼堂,有二十排左右的座位呈阶梯形分布.我于上午10点15分来到演讲厅.他当时正在五大块黑板上用法语写下他的思想要点.听众到齐时,他还没有全部写完.这次来了十位数学家,七男三女.忠实的塔蒂亚娜小心地坐在后面.会议主席、法籍突尼斯人达布西(Daboussi)教授从座位上站起来,简单介绍了一下德·布兰奇.接着,德·布兰奇流利地作了40分钟的报告,中间因为发现自己把减号写成加号,或其他几处小错误时才犹豫了两三次.一男一女在他演讲时做了详尽的笔记.其他人只是坐着,看上去既不厌烦也不着迷.到了11点40分,德·布兰奇讲到第五块黑板的最后,然后开始在第六块黑板上增加一些新的资料,他讲述了证明的步骤,并指出哪个地方还有漏洞.

“有个棘手的问题给我制造了很大的困难,”他说.“我在寻找正确形式时遇到了很多麻烦.也许再经过另外五六次专题讨论会后,”他充满希望对听众说,“我们能够找到它.”听众并没有表现出明显的赞成.“比伯巴赫猜想需要5次讨论会,”他继续

说，又加了一句，“我认为这要简单得多.”①

演讲结束后，一个满脸胡子、看上去很严肃的数学家问了好几个问题. 显然，他并未完全熟悉德·布兰奇的思想，但有兴趣进一步了解. 其他的听众则一声不吭地散去了.

我紧随达布西，问他德·布兰奇是否有可能获得他的“另外五六次专题讨论会”. 他摇摇头. “每件事他都要说上两三遍，”他生气地说. “实在太复杂了，不好懂.”

午餐时，我问德·布兰奇，他是否觉得他还能做点别的什么来说服世人，他的“证明”——如果完成——是值得一看的. 但这个问题对他似乎无足轻重. 【232】

“为什么谁都要这么做呢？”他问. “证明将会放到网上去. 任何有兴趣的人都能看到. 当有人真的决定承认它正确，我自会得到荣誉的.”

“但我们都只有另外的几十年好活，”我说. “难道你不想在死之前看到它被人们承认吗？”

“想，”塔蒂亚娜说.

午餐后，我问他现在想干什么. “我想出去走走，”他说，出于对妻子出人意料的尊重，他又补充道，“只要塔蒂亚娜同意的话.”然后他戴上曾经逗乐了米歇尔·贝利的贝雷帽，和塔蒂亚娜一道，在时断时续的阵雨中，沿左岸街道散步去了.

不管德·布兰奇有什么缺点，他和与他有分歧或者不理他的数学家们一样有一个特点. 和他们一样，他也被在某种意义下说并不存在——至少和他自己或你手里拿着的这本书的存在方式不同——的东西所吸引. 这是一个挥之不去的思想，它由一位羞涩的德国数学家于一个半世纪以前率先提出. 和大多数研究该问题的数学家——也许是所有研究该问题数学家——一样，

① 德·布兰奇 2002 年 5 月巴黎演讲中给出的证明要点见附录，供熟悉整函数希尔伯特空间的数学家参考. ——原注

德·布兰奇将他的大部分时间花在这个思想上，目的不是为了钱，只有一点点为了名，但主要原因还是他相信它是正确的，并且拼命地想要证明它.事实上，如果他和其他数学家知道有人已作出证明，他们甚至会快乐地死去.

“为了这个证明，我会很乐意去挖沟，挣足一百万给别人，”查尔斯·梁维克告诉我说.“如果我证明了它，他们可以拥有这个一百万.我也许会去给学生买书.”

同时，触须在微风中挥舞，因为世界上的数学家们互相发电子邮件，或在会议上交流.“我们需要一个大的思想，”他们说，“但还没有人得到过.”然而，不管他们相信多少，他们梦想大多数人都知道的那一天终将到来，甚至在他们的有生之年到来.

“有人擤擤鼻子，大家都会知道，”彼特·萨纳克说.“它会像野火一样蔓延，毫无疑问.”

阿兰·康尼斯给我讲了一个虚构的故事，说的是黎曼假设具有恶魔般的本性，能够使人感到惊奇并煽动人的情感.“有这样一位数学家，他和这个问题战斗了很多年，也许有二十年吧.【233】当然，最后他非常沮丧，但他对问题的答案极为好奇，因为毕竟它有可能不成立——我们不知道——可能并不是百分之百的零点都位于临界线上，而是有一些例外……，所以他决心不惜一切代价去了解答案，为此，他准备把自己的灵魂卖给魔鬼.他和魔鬼约好了见面时间.那魔鬼当然很聪明，他先带着待签字的纸进来了.这家伙在纸上签了字，一签完字他就问魔鬼，‘黎曼假设成立吗?’魔鬼看着他说:‘什么是黎曼假设?’于是，那家伙开始解释说:‘取整数的倒数，求它们的 z 次幂，当 z 的实部大于 1 时把它们加起来，并连续地延续到临界带，问零点在哪儿.’魔鬼说:‘我不了解这个问题——我要花些时间去考虑.我们三天后的午夜在同一个地方见面.’太好了！尽管那家伙吃了一惊——他已经在纸上签了字，但他仍不知道答案.他离开了，迫不及待地等了三天.然后，他在午夜来到同一个地方.没有人在.他等了半小

时，还是没有人来. 到了凌晨一点，还是没有人出现. 一点半. 仍然没有人出现. 最后，等到两点十五分，魔鬼终于大汗淋漓、披头散发地赶到了. 他走到数学家面前说道：'我做不出来，但我能证明一个漂亮的小引理！'"

康尼斯高兴地笑了. "故事的寓意是，黎曼假设是个恶魔般的问题. 假设它成立（就像大家都相信的那样），则有好几种可能性. 很可能正是在这样一个层次、这样一个深度，如果仅仅需要一种技巧就能证明它，就像把一根百米高的金属棒竖起来让它平衡一样，那将是一个悲剧. 有些事情尽管不可思议，但却是可能的. 这样一个证明根本谈不上对阿代尔线有什么理解. 这就很可悲. 另一方面，也可能是，除了真正完全理解该结构，别无他法. 这就很棒，但意味着我们仍然不知道离目标有多远，只能耐心等待. 如果有一种技巧，那将十分可悲，但悲剧是有可能发生的，你决不知道. 我们会感到非常失望." 【234】

配套知识 1. 对数与指数

我上学的时候，还没有计算器，复杂的计算是用对数表来完成的. 用法如下：要把两个很大的数乘起来，先在对数表中查出这两个数的对数. 对数表通常被以前的学生随意涂写过了. 于是得到另外两个数，下一步就是把这两个数加起来. 最后，在反对数表中查到这个新的数——两个数的和，相应的反对数就是你要找的答案.

你可以这样来描述. 为了计算 A 和 B 的乘积，先查找出 L_A 和 L_B（A 和 B 的对数），把它们相加，得到新的数 L_C. 这个数是 C 的对数，C 是在反对数表中查到的，它实际上就是 $A \times B$. 其好处显而易见——可以把一个复杂的乘法过程转变成一个较为容易的加法过程.

对许多学习这种烦琐程序的人来说，这像个魔术，但我想，只要它奏效就行了. 然而，对数不仅仅是一个有用的工具，它经常出现在数学的很多领域，并且告诉我们事物增大或缩小的方式. 当高斯想找出描述素数个数缓慢减小的方法时，他想，对数可以派上用场.

那么，一个数 A 与它的对数 L_A 之间究竟有什么关系呢？将对数相加何以能得到数的乘积呢？

原理如下. 学校里用的对数是以 10 为底的. 我们的记数制称作十进制，因为大数是用 10 的幂来书写的. 例如大家熟悉的数字 100 之所以写成这种形式，是因为它实际上表示了（$1 \times$



$10^2)+(\mathbf{0}\times10)+(\mathbf{0}\times1)$，而 111 则表示$(\mathbf{1}\times10^2)+(\mathbf{1}\times10)+(\mathbf{1}\times1)$，法则是，每一位数都须乘以 10 的幂，这些幂的次数自右至左递增. 如在大数 76 385 247 122 中，7 离右边 10 位，故乘以 10^{10}，加上 6 乘以 10^9，再加上 3 乘以 10^8，依此类推. 【237】

在这种记数制中，A 的对数就是指 10 的几次幂等于 A（幂的次数也称为它的指数），举个很简单的例子来说，1 000 的对数就是 3，这是因为 10 的 3 次幂，即 10 自乘 3 次，等于 1 000. 同样 10 000 的对数是 4. 所以如果你想通过对数来求 $A\times B$，L_A 等于 3，L_B 等于 4，$A\times B$ 的对数 L_C 就是 $L_A+L_B=3+4=7$，此即 1 000与 10 000 乘积的对数. 什么数的对数等于 7 呢？是 10 的 7 次幂：10^7，即 10 000 000. 于是求得 $1\,000\times10\,000=10\,000\,000$，直接做乘法也能得到这个结果.

但对数表中包含了所有数的对数，并不仅仅是 10 的整数次幂. 你可以查到 3.162 277 66 的对数为 0.5，何以能做到这一点呢？字面上说，它指的是 10 的 0.5 次幂等于 3.162 277 66，但是很难看出一个数的非整数次幂是什么意思. 你怎么能把 10 自乘 0.5 次呢？

过去，发展数学的最有效的途径就是扩张——考虑在某一范围内适用的思想，然后问：如果将范围扩大，结果会怎样呢？不管第一个想知道非整数指数（如 10 的 0.5 次幂）含义的人是谁，所用方法都不外扩展基本结构，因而开拓了一个全新的领域.

幂的指数（诸如 2，3，10）表示的是一个数自乘多少次，他遵循相当简单的法则. 将两数 x^a 和 x^b 相乘，结果为 x^{a+b}. 原因显而易见：x^7 乘 x^4 等于 x^{11}，因为$(x\times x\times x\times x\times x\times x\times x)\times(x\times x\times x\times x)$去掉括号后就是 11 个 x 相乘. 这从 $10^3\times10^4=10^7$ 中就能看明白.

当人们更仔细地观察指数时，他们问：是否有什么有意义的方式将它们的用法扩展到正整数之外？一个看上去似乎很有用 【238】

的扩展方法是问一个数的 0 次幂是什么意思. 于是,指数 0 被纳入到该系统之中. 就像 $7^3 \times 7^5 = 7^{3+5} = 7^8$ 那样,我们可以试着将同样的法则用于 $7^3 \times 7^0$——即使是我们还不知道 7^0 是什么意思,看看结果如何. 答案是 $7^3 \times 7^0 = 7^{3+0} = 7^3$,这表明,$7^3$ 乘以 7^0 就是 7^3 本身,也就是说一个数乘以 7^0 后保持不变. 换言之,若取 7^0 等于 1,则可将数系扩充,使之包含 0.

当然,本例中的 7 并没有什么特别之处. 同样的推理表明,任何一个数的 0 次幂与 1 在任何一个等式中的作用是相同的. 若 $x^0 = 1$,则 x^1 又是什么意思呢? 我们可以用同样的方法,举同样的例子. 让我们看看 7^3 乘以 7^1 结果是什么. $7^3 \times 7^1 = 7^{3+1} = 7^4$,所以 7^1 是这样一个数,7^3 乘以该数得 7^4. 显然,必须将 7^3 乘以 7 才能得到 7^4. 可见,7^1 等于 7,一般地,有 $x^1 = x$.

现在来看更大的一步. 到目前为止,我们已将很明显的整数指数(如 2 和 3)扩展到不太明显的整数指数 0 和 1. 假设我们要寻找分数或小数指数的意义. $7^{1/2}$ 的含义是什么呢?

用和前面完全一样的方法,得 $7^3 \times 7^{1/2} = 7^{7/2}$,这个结果并没有多大价值,因为我们根本不知道 $7^{7/2}$ 是什么意思. 但我们可以用这个方法来试试其他的乘积,以便得到我们能理解的结果. 若用指数相加的方法来计算 $7^{1/2} \times 7^{1/2}$,则得 7^1,即 $7^{1/2} \times 7^{1/2} = 7$. 因此 $7^{1/2}$ 是自乘后等于 7 的数. 这表明,$7^{1/2}$ 等于 7 的平方根.

这就是分数指数的意义,它导致了很有效的数系扩充. $7^{1/3}$ 就是 7 的立方根,$7^{1/10}$ 就是 7 的 10 次方根,等等. 甚至还可以有 $7^{2/3}$,因 $7^{2/3} \times 7^{1/3} = 7$,故 $7^{2/3}$ 是这样的数,它乘以 7 的立方根等于 7,换言之,$7^{2/3}$ 是 7 的立方根的平方.

【239】

一开始我们问一个数的对数怎么会是小数——3.162 277 66 何以等于 10 的 0.5 次幂. 因为 0.5 等于 $\frac{1}{2}$,所以答案已经为我们所理解. 10 的 0.5 次方等同于 $10^{1/2}$,和上面的例子一样,它的意思是 10 的平方根. 所以3.162 277 66的对数等于 0.5,即 3.162 277 66

是 10 的平方根，我们很容易验证这个结果. 将 3.162 277 66 乘以 3.162 277 66，取它的对数，然后相加，0.5 加 0.5 等于 1，因此，3.162 277 66×3.162 277 66 是对数为 1 的数，即 10. 这里我选了一个十分简单的指数$\frac{1}{2}$，但实际上我们可以取 10——或任何别的数——的任何小数次幂，使得任何正数都能表示成 10 的幂. 幂的指数便是这个数的对数.

在这些例子中，我们使用的是以 10 为底的对数，但我们也可以选择其他底数. 例如，若选取以 2 为底的对数，则 4 的对数为 2，8 的对数为 3，16 的对数为 4，依此类推. 因为这些对数就是 2 的幂的指数.

有时，数学家们讨论一个按对数增加的特殊过程. 例如，在海上，水面上的风速是随高度的增加而按对数递增的. 这意味着，如果在 10 米高处风速为 v，那么在 20 米高处，风速就是 $v\times\log 2$，在 40 米高处风速就是 $v\times\log 4$. 对数的递增速度要比数本身的递增速度慢得多——当数从 1 增加到 10 再增加到 100，对数仅从 1 增加到 2 再增加到 3①，所以，随着高度的增加，风速增加的速度要缓慢得多. 【240】

① 正确说法应该是“对数仅从 0 增加到 1 再增加到 2”. ——译者注

配套知识 2. 方程

方程就像平衡的天平，其支点就是等号. 开始时，天平的两个托盘上分别放有两组量或数学式子，天平达到平衡. 在最简单的一类方程中，托盘上含有一个或多个等重砝码以及许多已知重量的砝码，你的工作就是求出未知砝码的值. 如果左边托盘上有一个未知砝码 x 和 11 个重均为 1 千克的砝码，而右边托盘上砝码重 15 千克，并且两边平衡，你就能猜出未知砝码重 4 千克. 但在数学上，猜测仅此而已. 数学家们喜欢方法和证明. 上例中的方法就是如何获得一个托盘上的一个 x，使与另一托盘上的若干千克平衡.

或许你能看出，如果你在其中一个托盘上施行某种运算，如加上或减去砝码，那么只有在另一个托盘上施以同样的运算，天平才能保持平衡. 在一个托盘上加 100 千克会导致天平严重不平衡；但若在两个盘上都加 100 千克，则不会产生什么影响. 所以，回到上面那个简单例子，如果想在左边的托盘中只留下未知的砝码，那么我们必须拿走 11 千克的砝码. 为了保持天平平衡，我们必须在右边托盘上拿走同样的 11 千克. 于是原来的 15 千克只剩下 4 千克. 这样，一边的 x 与另一边的 4 千克平衡，因此 x 必等于 4.

这是一个费劲但也许很有帮助的表示方程 $x+11=15$ 解法的方法. 处理这个方程的数学方法是在等式两边同减去 11，从而得到 $x=4$. 当你求得 x 的一个值时，该值就称为方程的根——使两边相等的数.

如果在一个托盘上有 3 个未知砝码和已知的 7 千克砝码，

与另一托盘上的 16 千克相平衡，情况就稍微复杂一些. 先从每个托盘中拿掉 7 千克，于是一边剩下 9 千克，而另一边则剩下 3 个未知砝码. 但根据在天平两端施以同样运算的原则，我们把两个盘中的重量都除以 3，天平仍将保持平衡. 这样，在一个盘上只剩下一个 x，而另一个盘上剩下 3 千克，于是知未知砝码为 3 千克. 所以，用符号表示： 【241】

$$3x+7=16,$$
$$3x=9,$$
$$x=3.$$

关键方法总是在方程两边施以同样的运算，使得一边只剩下 x，另一边就是它的值.

有一个更简单的做法. 看似不同，但所得结果完全一样. 以 $x+11=15$ 为例，不在方程两边同减去 11，而是把方程左边的 11 移至右边，并将"+"改成"－"，得相同的结果：

$$x+11=15,$$
$$x+\textcircled{11}=15-$$
$$x=15-11,$$
$$x=4.$$

这一过程可以概括为学校数学课上学到的一句话："移项，变号."你可以把一个数从方程的一边移到另一边，只要你改变它的符号，加变减，减变加，则两边仍然相等. 类似地，不在 $3x=9$ 的两边同除以 3，而是把与 x 相乘的 3"移掉"，用它去除另一边，并把"乘"改成"除"，于是有：

$$3x=9,$$
$$\textcircled{3}x=\underline{9},$$
$$x=\frac{9}{3},$$
$$x=3.$$

【242】

这些操作和其他类似的操作对于整天和方程打交道的人来说，简直是家常便饭．对于任何只含有一个未知数 x 的最简单形式的方程来说，这些方法足以能够解决它们了．但是方程也可能含有 x^2，x^3 或者 x 的更高次幂，这些方程需要用十分不同的方法来解——如果它确实可解的话．含 x^2 的方程称为二次方程，含 x^3 项的方程称为三次方程．

对于这些方程，我们的目标是把未知数放在一边，其余的都放在另一边，但通常并没有标准的做法．

另外很重要的一点就是二次或更高次方程的根不止一个．一个二次方程有两个根，一个三次方程有三个根，等等．举个二次方程的例子：

$$x^2+x=12.$$

它有两个根，所以有两个 x 的值满足这个方程：x 可以等于 3 或 -4．若 x 等于 3，则有 $3^2+3=12$，等式成立，若 x 等于 -4，则 $(-4)^2+(-4)=12$，等式也成立．

这个方程也可以写成 $(x-3)(x+4)=0$．用相当简单的方法就能将两个括号相乘．若有两个各含若干项的括号相乘，则取第一个括号中的第一项，依次乘以第二个括号中的每一项．然后取第一个括号中的第二项，重复刚才的做法．最后将所得的所有项相加．上例中，x 是第一个括号中的第一项，-3 是第二项，我们有

$$x\times(x+4)=x^2+4x,$$

以及

$$-3\times(x+4)=-3x-12.$$

将所有各项相加，得

$$x^2+4x-3x-12=x^2+x-12.$$

上面我们说明了 $(x-3)(x+4)$ 是 x^2+x-12 的另一种表达方式，它们都等于 0．说 $x^2+x-12=0$，和说 $x^2+x=12$ 是一回事（把 12 移至方程的另一边，并把＋改成－），这就是我们一开始

【243】

所给出的方程.

这里还有另外一点需要注意. 若方程一开始就写成$(x-3)(x+4)=0$,则很容易看出它的根.你应该立马就能看出,令x等于3,则第一个括号等于0,于是方程得到满足(因为0乘以任何数都等于0).类似地,在第二个括号中令x等于-4,所得结果是一样的.

【244】

配套知识 3. 无穷级数

在数学上，处理无穷时必须十分小心. 本书经常提到的英国杰出数学家李特伍德曾描述了下面这则悖论：

> 将标有 1,2,… 的小球(或者对数学家来说就是数字本身)按下述方法放入盒子中. 在离正午还有 1 分钟的时候，把 1 到 10 号球放入并取出 1 号. 在离正午还有 $\frac{1}{2}$ 分钟的时候，把 11 到 20 号放入并取出 2 号，在离正午还有 $\frac{1}{3}$ 分钟的时候，把 21 到 30 号放入并取出 3 号，依此放入并取出小球. 那么，到正午时盒子里有多少球呢？答案为零，因为任选一个球都不在盒子里，比如说 106，它在第 106 次操作的时候已被取出.[120]

问题的一部分在于把无穷看作一个实际数字，这是一种很马虎的做法，只有在我们并不严格地讨论数学问题时才用它. 但这种做法充满了陷阱. 例如，正整数构成了一个无穷级数，素数也构成一个无穷级数——它们都可以永远继续下去，但它们不可能具有相同的项数，因为一个级数包含于另一个级数. 但仍然可能用各种不同方法把玩无穷级数，并得到有意义的结果. 数学家喜欢把各项加在一起或乘在一起——你也许认为结果会产生无穷大. 但是早期的数学家很快就意识到结果并非总是如此. 当

然，$1+2+3+4+5+6+7+\cdots$直到无穷，结果为一个无穷大的数，同样，$1+3+5+7+11+13+17+19+\cdots$（由所有素数构成的级数之和）也是一个无穷大的数. 但 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ 又如何呢？不论有多少项加入这个级数中，其和永远不会超过 2. 这不仅仅因为这些项都是分数. 有些由无穷多个分数构成的级数之和却是一个无穷大的数. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots$ 就是其中之一.（这仅仅是数学一直以来带给你的拍案惊奇之一）. 事实上，你需要颇为复杂的数学工具去发现哪一个级数是发散的（当你加上更多的项时，和变得越来越大），哪个级数是收敛的（无论你加上多少项，和永远不会超过某个固定的数）. 【245】

下面这个分数无穷级数对我们的故事来说是非常重要的：

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots,$$

它是一个倒数级数，在数学上，一个数的倒数即是 1 除以该数. 所以 2 的倒数就是 $\frac{1}{2}$，32 的倒数就是 $\frac{1}{32}$，等等. 类似可以写出分母比平方更高次的级数. 分母取正整数立方，得

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7^3}+\cdots,$$

或者分母取正整数的 19 次方，得

$$\frac{1}{1^{19}}+\frac{1}{2^{19}}+\frac{1}{3^{19}}+\frac{1}{4^{19}}+\frac{1}{5^{19}}+\frac{1}{6^{19}}+\frac{1}{7^{19}}+\cdots,$$

无论你选择几次方，结果仍为无穷级数.

在级数中，通项可写成 $\frac{1}{n^s}$，其中 n 依次取每一个正整数，s 为每个整数的指数. 对有些读者来说，这已经是一个太难理解的数学符号了，但是了解一些特殊的符号是很重要的，因为它们将不断出现.

那些意义不如"+"或"-"那样为人熟知的符号在经过解释以后还是很好理解的,因为,即使它们不为人熟知,但他们所描述的概念却是为人所熟知的. 例如,大写的希腊字母 Σ,它的意思是"和",用于一系列相加的元素.

让我们来看看我们前面遇到过的分数级数的另一种书写方法. 把 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$写成

【246】

$$\sum\frac{1}{2^n},(n=0,1,2,3,4\cdots)$$

这个式子的意思是"分母为 2 的逐次增加的幂的各项之和". 这是因为,分数的分母依次为 $2,2^2,2^3,2^4,\cdots$. 所以你能算出级数的任何一项,只要替换适当的 n 即可. 如,第 3 项为$\frac{1}{2^3}$,即$\frac{1}{8}$,第 10 项为$\frac{1}{2^{10}}$(2^{10}等于 $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$,也就是 2 自乘 10 次).

以下是另一个看上去类似的级数:

$$\sum\frac{1}{n^s}.$$

这里,n 和前面一样表示自然数,每一项逐次增加 1. 故写出来就是:

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots.$$

但这里的 s 是什么呢? 它只说明了这个特殊的分数和中,每一个分数的分母包含了递增的自然数,每一个自然数的指数均相同,所以如果 s 等于 2,我们就得到

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots,$$

即

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots.$$

所以，记住我们先前的记号，我们可以把它加在一起（永远加下去）的分数级数写成更简洁的形式 $\sum \frac{1}{n^s}$，其中 $n=1,2,3,4,5,\cdots,s=2$.

这看似没有什么值得大惊小怪的，但事实上，表达式 $\sum \frac{1}{n^s}$ 乃是黎曼假设的核心. 通过把级数所有项相加，这组符号有一个特定的值，并且这个值随着 s 值的不同而改变. 所以，尽管看上去只是描述了一个简单级数，但它实际上却是一整族级数的简写，其中的每一个级数都对应于 s 的一个值.（记住，n 的意思只是，每个级数的所有分母包含了一切自然数，直到无穷.）

【247】

【248】

配套知识 4. 欧拉恒等式

ζ 函数(原来的欧拉函数不用复数)的最不寻常的一个特征是欧拉本人发现的关系. ζ 函数是所有正整数的某次幂的倒数和. 因此,要求 $\zeta(5)$,即 5 次幂的 ζ 函数值,写出 $1^5, 2^5, 3^5, 4^5, 5^5, \cdots$,再写出倒数列 $\frac{1}{1^5}, \frac{1}{2^5}, \frac{1}{3^5}, \frac{1}{4^5}, \frac{1}{5^5}, \cdots$. 现将这些倒数相加,所得的数(这个数并非无穷大,因为这些数以某种导致有限和的方式越来越小)即为 $\zeta(5)$ 的值.

对于任何正整数 s,$\zeta(s)$ 在数学上表示为:

$$\sum \frac{1}{n^s},$$

读作"1 除以 n 的 s 次幂的和,n 从 1 到无穷大". 欧拉发现,对任一 s,$\zeta(s)$ 的值也可由一个完全不同的只用素数的表达式来给出. 这种新的表达式与涉及所有正整数的和之间存有好几个重要的差异. 第一,经典的 ζ 函数包含了形如 $\frac{1}{n^s}$ 的项,其中 n 取相继的正整数值,欧拉的新表达式使用了 $\frac{1}{p^s}$,其中 p 只取相继的素数值. 第二,$\frac{1}{p^s}$ 包含在一个稍微复杂一些的项之中:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

第三,当 p 取遍所有的素数,每一项是与其他项相乘,而不是

相加. 【249】

欧拉新的表达式写作

$$\prod_{p=\text{素数}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

其中符号 Π 是大写希腊字母 pi(不要和 π 混淆,小写字母 pi 表示常数 3.141 59…),意思是"……的乘积". 欧拉说,这个乘积等于

$$\Sigma \frac{1}{n^s},$$

对 s 的一切值均成立.

为便于理解,我们不用 Σ 和 Π,欧拉所说的结果如下:

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots=$$

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{11^s}}\right)\cdots.$$

这叫恒等式,因为它对 s 所有的值都成立——它和方程不同,因为方程只对未知数的某些值成立.

欧拉的发现被誉为"数学上最引人注目的发现之一". 说它引人注目,是因为它是如此令人惊讶. 等号的一边是一个分母中的 n 逐一递增的级数. 对于 n,我们理解得很清楚——它们都是我们很熟悉的用来计数的数. 而在等式的另一边却是每一项包含一个素数的表达式——在欧拉那个时代,较之于整数,素数并未被人们很好地理解. 尽管我们甚至都写不出一个能产生每一个相继素数的函数,但欧拉的发现表明,它们似乎与整数密切相关.

为什么会这样呢? 如果你一直跟随着我,你可能会觉得有必要探究其中的原因. 如果我们取等式右边乘积中的一项,得 【250】

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

将分母表示成

$$\frac{p^s-1}{p^s},$$

取倒数即得

$$\frac{p^s}{p^s-1}.$$

因为分数的倒数只是把该分数的分子分母倒过来.$\left(\right.$所以 1 除以 $\frac{1}{2}$ 即是把 $\frac{1}{2}$ 倒过来,得 2.$\left.\right)$

为了理解下一步,从答案开始往后推会更容易.将表达式 p^s-1(你立马可以看出这样做的原因)乘以下面的级数

$$1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\frac{1}{p^{4s}}+\cdots.$$

为了把两个式子乘起来,只需将整个级数先乘以 p^s,然后乘以 -1,再将所得结果相加.乘以 p^s 得到下面的

$$p^s\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\frac{1}{p^{4s}}+\cdots\right)$$

$$=p^s+1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\frac{1}{p^{4s}}+\cdots.$$

【251】 将同一个级数乘以 -1,得

$$-1-\frac{1}{p^s}-\frac{1}{p^{2s}}-\frac{1}{p^{3s}}-\frac{1}{p^{4s}}-\cdots.$$

将两次乘法的结果相加,第二个乘积抵消了第一个乘积中的大部分结果,只剩下 p^s.

总结一下.我们说明了,如果将级数(以下称为 A)乘以 p^s-1,结果得 p^s.因此,$A(p^s-1)=p^s$.这表明

$$\frac{p^s}{p^s-1}=A$$

即级数

$$1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\frac{1}{p^{4s}}+\cdots.$$

但上面我们看到，

$$\frac{p^s}{p^s-1}$$

是欧拉恒等式右边的一项，因此，我们可以把整个恒等式重新写成

$$\sum\frac{1}{n^s}=\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{2^{3s}}+\frac{1}{2^{4s}}+\cdots\right)\times$$
$$\left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{3^{3s}}+\frac{1}{3^{4s}}+\cdots\right)\times$$
$$\left(1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{5^{2s}}+\frac{1}{5^{3s}}+\frac{1}{5^{4s}}+\cdots\right)\times\cdots$$

取遍所有素数，一直乘下去.

现在我们离等式的证明更近了一步. 下一步（无论如何对我来说是如此）似乎是很吓人的. 我们现在必须把无穷多个括号乘起来，每个括号内都包含无穷多项. 所有这些等到下个圣诞节之前才能做出来. 【252】

但欧拉所知道的是下列事实：每一个正整数都等于唯一一组素数的乘积（此即算术基本定理）. 如，2 324 168 $=2^3\times7^4\times11^2$，并且这个数不可能由另一组素数相乘得到. 他发现，每一个括号中的每一项乘以其他括号中的每一项，可得一个级数，其每一项都具有 1 除以一系列素数的幂的形式，即

$$\frac{1}{p_1^{as}p_2^{bs}p_3^{cs}p_4^{ds}p_5^{es}p_6^{fs}p_7^{gs}p_8^{hs}p_9^{is}p_{10}^{js}p_{11}^{ks}p_{12}^{ls}\cdots},$$

其中，$p_1,p_2,p_3,\cdots$是相继的素数，它们的指数包含每一种可能的组合，因为每一个括号中的每一项将乘以其他每一个括号中的每一项.

最后，欧拉看到，这个分数级数中每一个分数的分母都等于一个自然数 n，它们各不相同，因为每一个 n 都等于唯一的一组素数的乘积. 由于各项的乘积包含了所有的素数，因此级数就变成了一个包含所有自然数的级数. 【253】

配套知识 5. 数学上的图像

数学上的一个主要进展之一就是发现代数式可用图像上的线来表示.

最简单的图像有一条横轴和一条与之垂直的竖轴. 轴上等间隔地标有数字,右半轴和上半轴上的数字为正,左半轴和下半轴上的数字为负. 横轴称为 x 轴,竖轴称为 y 轴. 在该坐标系中,任一点可以用两个数 x 和 y 来表示. 若 x 为 2,y 为 3,则它们代表了一个在横轴上方 3 个单位,竖轴右方 2 个单位处的点. 现在,如果我们要在该坐标系上标出 x 和 y 满足某种数学关系的点,比如说 $3x=y$,我们会发现,所有这些点构成了一条直线,它始于两轴的交点(称为原点),向右上方倾斜. 若 x 和 y 之间的关系不同,如 $2x=7y$,则得另一条不同的直线,它仍然通过原点,但具有不同的斜率. 我们怎么知道这条直线是过原点的? 好,问问你自己,当 $x=0$ 时 y 的值是多少,你会看到 $y=0$. 但如果取表达式 $4x+3$,并令它等于 y,结果又如何呢? 结果也是一条直线. 但 $x=0$ 时,$y=3$,所以这条直线仍然向右上方倾斜,但它不通过原点. 它与 y 轴交于 $y=3$ 处.

你可以作出任何两个变量的数学函数的图像,在平面上得到一条直线或曲线. 表达式 $x^2+y^2=1$, 即 $x^2=1-y^2$, 表示一个圆, 因为满足这一关系的所有点到原点的距离都等于 1 个单位.

由此可知,以 s 为横坐标,$\zeta(s)$ 为纵坐标,作出一系列点,就

可以用图形来表示欧拉 ζ 函数. 若 $s=2$,则 $\zeta(s)=\sum\frac{1}{n^2}$,或者展开来写,得

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots.$$

【254】

前 5 项相加得到 1.463 611 111…,如果把其他所有项相加,可得 1.644 934 067①.

这个过程允许我们把点放在图像上,其中横坐标是 s 的值,纵坐标是 $\zeta(s)$ 的值. $\zeta(3)=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots$,所有项相加得 1.185 662 037…

类似地,在 s 整数值的空隙中我们还可以填入分数值,如

$$\zeta\left(1\ \frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2^{1\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3^{1\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4^{1\frac{1}{2}}}+\frac{1}{5^{1\frac{1}{2}}}+\cdots.$$

由于$\frac{1}{2^{1\frac{1}{2}}}$等于$\sqrt{(2^3)}$,即$\sqrt{8}$,故该级数始于 $1+\frac{1}{2.828\,427\,125}$,你大概能够看出怎样算出其他项的值,从而求得 $\zeta\left(1\ \frac{1}{2}\right)$.

当 s 等于 1 时,有趣的事发生了,因为我们得到无穷级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$,当你加上越来越多的分数时,它实际上无限制地越来越大,所以 $\zeta(1)$是无限的.

因此,对于实数 s,即"通常的数",我们能够算出 $\zeta(s)$的值,并作出它的图像,如图 19 所示.

对于两个变量,我们所能做的就是通过构造两条相互垂直的轴(可想像成南北向和东西向),在二维纸面上作出函数的图像. 其中一个变量取为到横轴的距离,另一个变量取为到竖轴的距离,这样,对于任何实数 s,就唯一表示出 $\zeta(s)$的值. 但是黎曼

① 这个结果恰好神秘地等于$\frac{\pi^2}{6}$,但我们不作进一步介绍. ——原注

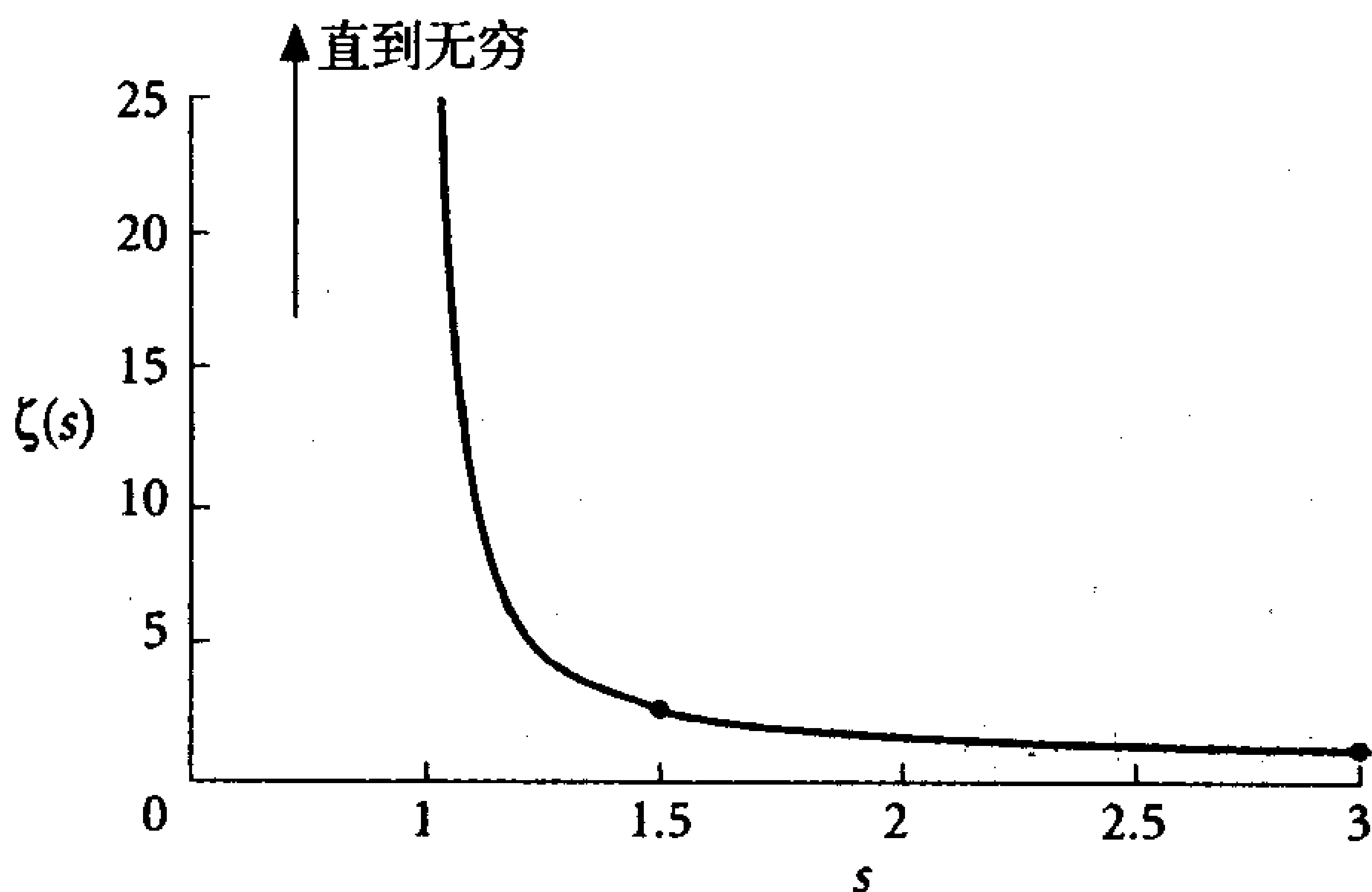


图 19 当 s 为实数时，取 s 的值为横坐标，$\zeta(s)$ 的值为纵坐标，函数 $\zeta(s)$ 可画成二维图形. 这里，曲线上标出的点表示 $\zeta(3)$ 和 $\zeta(1.5)$. 但由于 $\zeta(1)$ 的值是无穷大的，故 $s=1$ 时，图像趋向无穷远处.

【255】

ζ 函数有四个变量. 这是因为我们现在感兴趣的 s 值是复数，即每个 s 都必须具有 $x+\mathrm{i}y$ 的形式. 算出 $\zeta(x+\mathrm{i}y)$，得到另一个复数 $u+\mathrm{i}v$. 不可能用二维的图像来表示出这 4 个变量之间的关系. 甚至也不可能用三维的图像. 事实上，要用 4 维的图像才能正确表示出它们之间的关系.

若想用图形来表示黎曼 ζ 函数，则必须找出一种方法在图像上画出 x,y,u 和 v，使得这四个变量的每一个组合表示一个点. 从二维情况外推，我们需要四条坐标轴，每一条轴都与其他三条轴垂直，这在我们所熟悉的三维空间（数学家称之为欧几里得空间）里是不可能的事. 在三维空间里，我们可以用三条两两相互垂直的坐标轴——东西、南北、上下——来表示位置. 在这个空间上，我们可以用三个不同的坐标唯一地表示一个点. 但现在我们有四个坐标：x,y,u 和 v. 所以，为了表示出所有复数值情形的黎曼 ζ 函数的性态，我们需要一个四维图像，在我们固有的三维空间里，这是件难以想像的事情，尽管对数学家来说似乎

不成问题.

用图形方法来理解黎曼 ζ 函数时,我们所能做的最好的事是去寻找一种只用一个数而不是两个数来表示 $\zeta(x+\mathrm{i}y)$ 的值(形如 $u+\mathrm{i}v$ 的数)的方法,当 $\zeta(x+\mathrm{i}y)$ 等于 0 时这个数也等于 0. 图 20 说明了这样做是可能的. 若 z 为复数 $x+\mathrm{i}y$,则通过计算表达式 $\sqrt{x^2+y^2}$ 得一单个的值,由于 x 和 y 为实数,因此我们只得到一个实数,与其他两条轴上的 u,v 相应.

【256】

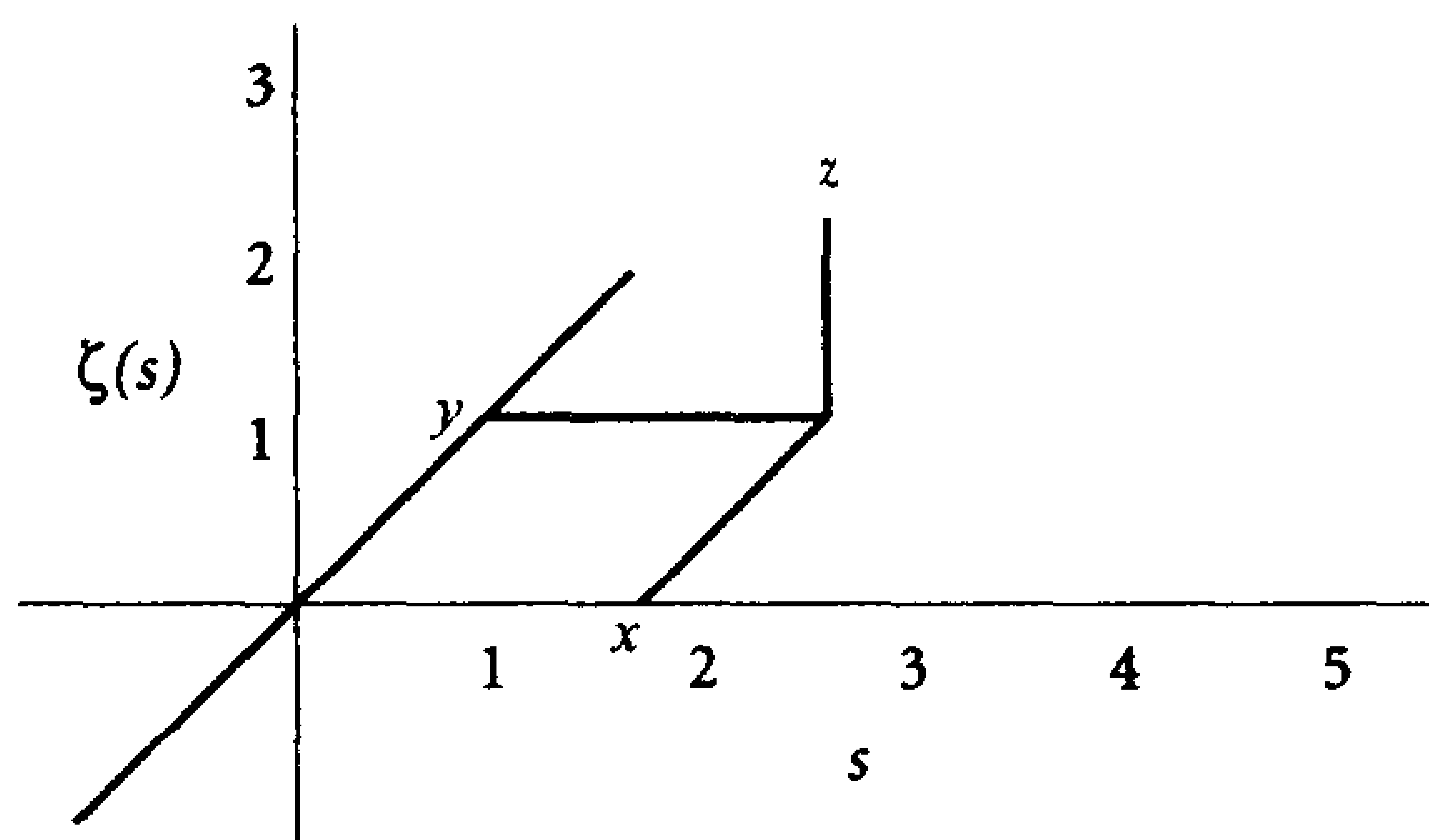


图 20 如果我们想作出 ζ 函数 $\zeta(s)$(其中 $s=x+\mathrm{i}y$)的图像,我们得到一个形如 $u+\mathrm{i}v$ 的答案. 但是要作出 $\zeta(x+\mathrm{i}y)=u+\mathrm{i}v$ 的图像,我们需要在四维空间上做这件事,因为它包含了四个变量 x,y,u 和 v.

然而,数学家们已设计出一种方法,将复数 $u+\mathrm{i}v$ 表示成单个实数 z,z 等于 $\sqrt{u^2+v^2}$,从而把图像"折叠"成三维. 因此,如果对于水平轴上的任何值 x 和 y,算得 $\zeta(x+\mathrm{i}y)$,我们将得到一个复数 $u+\mathrm{i}v$,利用这个结果,算出 z 的值,把它作为 x,y 平面上方 z 个单位的点.

总结一下:我们已经设计出一种方法,对于 $\zeta(s)$(含有复数的函数)的任何值,能确定单个实数,这就意味着,对于 u,v 的所有值,我们可计算出 $\zeta(s)$ 的一个值,这就是第三个数 z. 利用三个变量,我们可以作出 $\zeta(s)$ 的三维图像. 显然,压缩 x 和 y,并用一个数 z 来表示它们时,我们丢掉了某些东西,因为产生了某种模棱两可的情形. 每一个 $\zeta(s)$ 都有唯一的一个值,但 x 和 y 的

一些不同值会产生同样的 z 值. 因为 z 等于 $\sqrt{x^2+y^2}$, x 可以是 2 或 -2, y 可以是 3 或 -3, 它们的任意组合都产生相同的 z 值. 但我们至少可以作出黎曼 ζ 函数的一个"图形",尽管这个图形并不完善,但却包含着有用的信息,颇像一个四维物体的三维【257】"投影". 图 20 所示的黎曼 ζ 函数表示法便是这样产生的.

配套知识 6. 矩阵和特征值

矩阵是表示数的集合的数学工具，是单个的数学实体. 它们可以有任意的大小，但 2×2 是其中最简单的，它形如

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

其中 a,b,c 和 d 称为矩阵的元素，它们可以是实数或复数. 矩阵不一定是正方的，也可以是长方的——例如一个 6×15 的矩阵，有 6 行和 15 列——或是只有 1 列或 1 行. 在物理学上有实际应用的矩阵可能有几千甚至几百万行和列，易见为何把它们当作单个的对象是十分有用的. 这些对象有加、减、乘、除运算方法，这些方法通常归结为元素的常规运算. 但对那些习惯于通常的乘法来说，矩阵乘法的结果大不相同. 在处理日常数字时，2×3 与 3×2 有相同的结果，但是对于矩阵，情况就不一定这样了.

这些运算是以特殊方式进行的. 例如，两个 2×2 矩阵的乘法是这样进行的：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}.$$

如果我们把上述运算简记为 $A\times B=C$，那么我们将看到，将同样的法则用于 $B\times A$ 所得结果并不一样：

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}.$$

【258】

所以，将 $A\times B$ 改成 $B\times A$，结果不是 C，而是另一个不同的矩阵

(记为 D). 与通常的乘法相比,这似乎很奇怪,但事实上,其他通常的算术运算也并不总是"可交换的". 以除法为例:11 除以 7 并不等于 7 除以 11.

矩阵的每一个位置上都有一个特定的数,它们的选择往往为了特定的目的,如解方程. 例如,你可以取下列三个方程,要求同时满足它们的 x,y 和 z 的值.

$$2x+5y+5z=1,$$
$$4x+10y=2,$$
$$x+10y=8.$$

你可以将这些方程表示成三个矩阵如下:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 4 & 10 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

对矩阵施以运算,可求出 x,y 和 z 的值(就像对方程施以运算一样,通过对方程两边施以同样的运算来进行变换). 将 3×3 矩阵变成一个对角线上均为 1 的等价矩阵(不用担心怎么做),则上面的等式变成等价的形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

若将上面的等式变回到三个方程,易见它等价于 $x=-2$,$y=1$ 和 $z=0$.

【259】 这看起来似乎很复杂,但这些例子暗示了在数学与物理上常常应用的这类矩阵的复杂性. 例如,在飞机制造业中,工程师需要知道机翼的振动. 为此,他会典型性地使用 1 000×1 000 矩阵. 要把它们乘起来,就意味每一个元素都有 1 000 次加法运算,总共有 1 百万个元素. 【260】

米歇尔·贝利和约翰·济廷所用的随机矩阵,和上述简单例子中的矩阵有三方面的不同. 首先,它们的元素包含了复数;

其次，这些数字以相当特殊的方式随机地选取；第三，这些矩阵都有无穷多行和无穷多列.

这样的奇怪对象出现在数学上，反映了物理学上某些问题的本质. 在这些问题中，有很大数目的变量需要以某种方式进行操作. 一类称作自伴矩阵的随机矩阵持有黎曼假设的线索. 该矩阵的对角线是一面镜子，它以数学的方法把矩阵的一半反射到另一半. 这里，"反射"指的是对角线一侧的每一个元素在另一侧相应位置上有一个按照某个特殊法则选择的对应元素. 对于实数，你可以想像，任意选取一个数作为矩阵左下角的元素，把它的倒数放在右上角. 在随机矩阵中，所有的元素均为复数. 故任意选取一个复数 $a+ib$，将其共轭复数放在对角线另一侧、与对角线等距离处("反射")，如图 21 所示.

求复数 $a+ib$ 的共轭复数时，只需把加改成减，所以 $a+ib$ 的共轭复数为 $a-ib$，一个复数和它的共轭复数有一些有趣的性质. 其中之一是，若将它们相乘，则结果为一实数. 记住 i 是 -1 的平方根，所以有 $(a+ib)(a-ib)=a^2+iab-iab-i^2b^2$，$iab$ 消掉了，因 $i^2=-1$，故结果成了 a^2+b^2，为一个实数.

于是，我们得到一个无穷矩阵，在它的对角线一侧填满了任意选取的复数，而在对角线另一侧的相应位置上填满了共轭复数. 为了写完这个矩阵，对角线上用实数来填，数字也是任意选取的. 这就是构造自伴随机矩阵的方法，图 22 用对角线表示了一个无穷自伴随机矩阵.

本故事中，矩阵还有另外一个重要特征. 每一个 $n\times n$ 矩阵都有 n 个相关的特殊数. 这些数被称为特征值，2×2 矩阵 【261】

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

有两个特征值. 它们恰为一个方程的根，这个方程可以很容易从矩阵中导出来. 本例中因为矩阵为 2 阶，故方程为二次方程. 该矩阵的方程为 $x^2-4x+1=0$，故特征值为 $2-\sqrt{3}$和 $2+\sqrt{3}$，分别

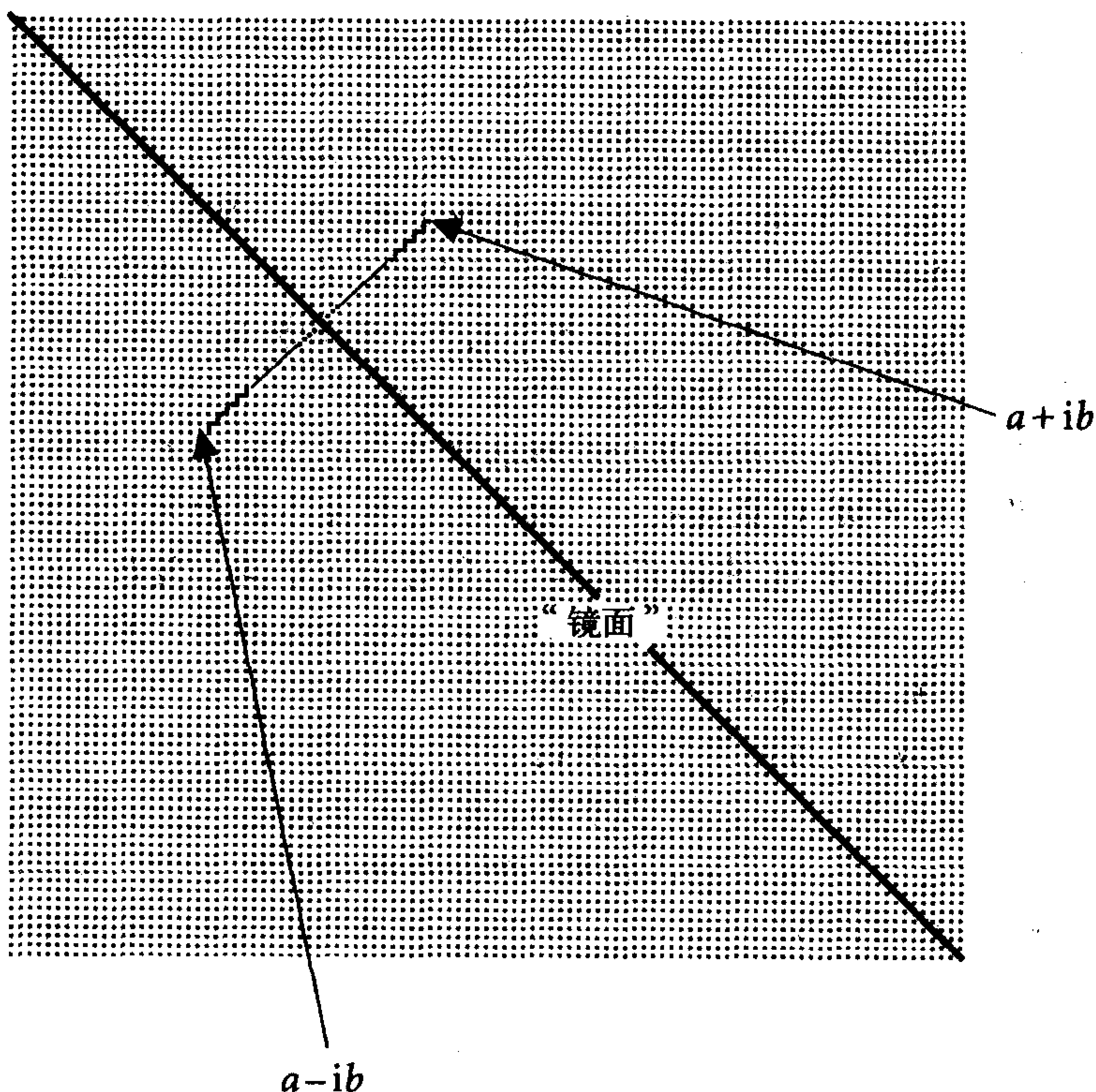


图 21 一类被称作自伴矩阵的随机矩阵，持有黎曼假设的线索. 该矩阵的对角线是一面镜子，以数学的方法把矩阵的一半反射成另一半. 你可以任意选择一个复数，如 $a+ib$，将其放在矩阵右半，自伴矩阵的法则说：把某个元素的共轭数放在关于对角线对称的相应位置上.

约等于 0.267 949 192 和 3.732 050 808. 一个 1 000 阶矩阵有1 000 个特征值，它们是一个首项为 $x^{1\,000}$ 的方程的 1 000 个根.

【262】 你可以把特征值设想成矩阵唯一的“谱”. 化学元素和分子都有光谱，由一系列不同波长的不同直线构成. 可以将它们写成一个数列，每一个元素都有唯一的谱，而元素可由谱来确定.

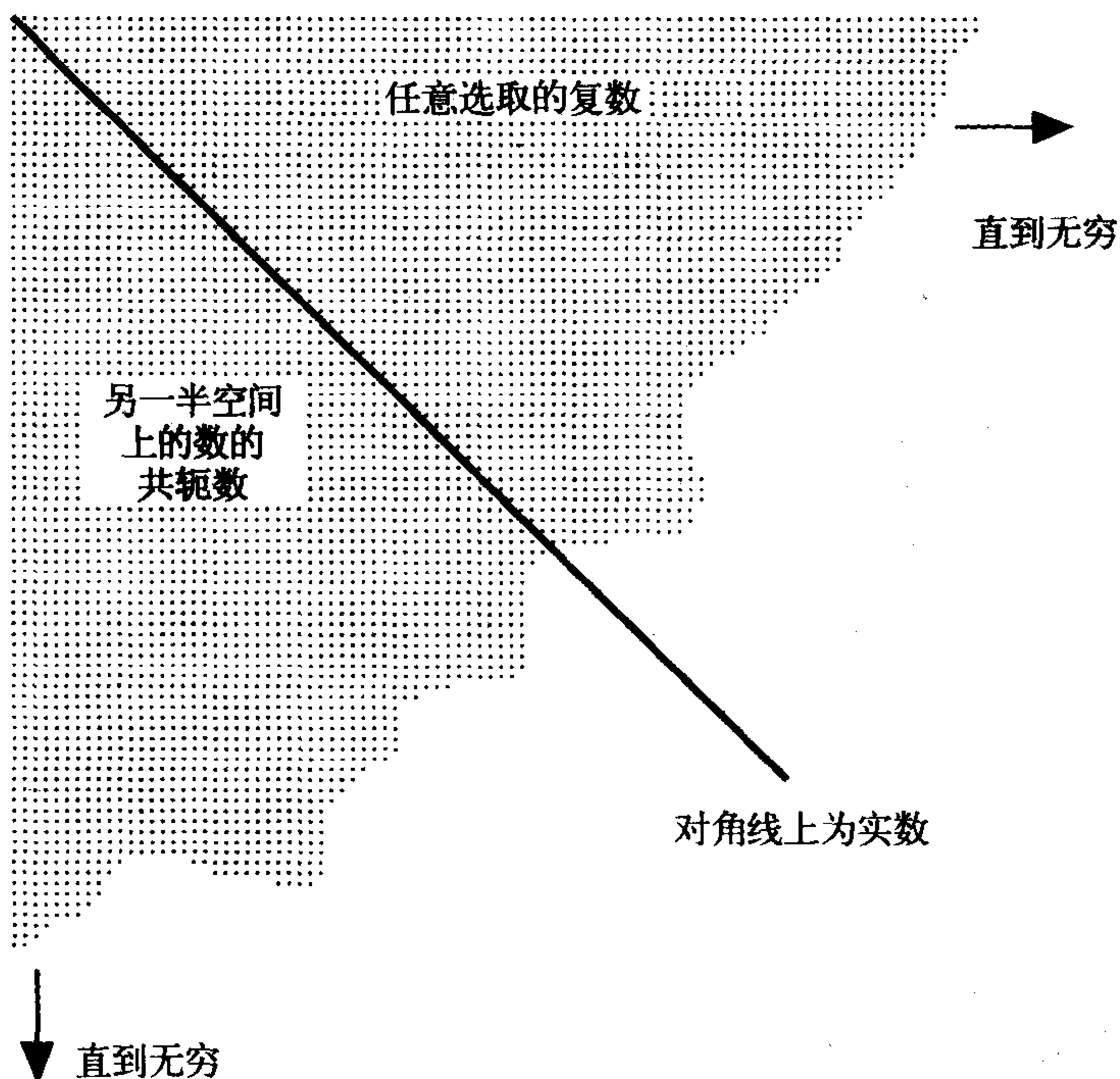


图 22　对黎曼假设很重要的随机矩阵是自伴矩阵(见图 23),它们有无穷行和无穷列.数学家处理的是这些矩阵的一个集合,该集合有无穷多个元素.

但随机矩阵理论并不仅仅满足于一个矩阵(约一半元素是任意选取的).该理论处理的是随机矩阵的整个集合.任意选取数字填入无穷矩阵一半空间时,我们有许多不同的选择去填那些空间.事实上,通过不同数字的选择,我们可以构造出无穷多个不同的矩阵.

"你得到的是无穷矩阵,"贝利说,"有无限多个,无穷大个.现在称之为随机矩阵集,该集合含有相当高阶的无穷大."

还要再经过一步才能看到随机矩阵与黎曼 ζ 函数之间的联系.无穷集合中的每一个无穷矩阵都有一列与它相关的特征值,

每一列中都有无穷多个特征值,每一列称为该矩阵的谱.

当随机矩阵被用来分析量子物理学系统的行为时,这个特征值的谱与能量级相对应,因为量子力学是建立在如下事实之上的:在微观世界——在很小的实体层次上——诸如能量这样的物理性质只能存在于"套装"里(称为量子),而不像宏观世界的受经典力学支配的平稳变化特性.

贝利总结说:"原子中电子的能级所能取到的值就是矩阵的特征值.计算原子和分子能级的方法就是找出适当的矩阵并求出它的特征值."

这些被称为特征值的神秘的量是以下述方式产生的(见图23).

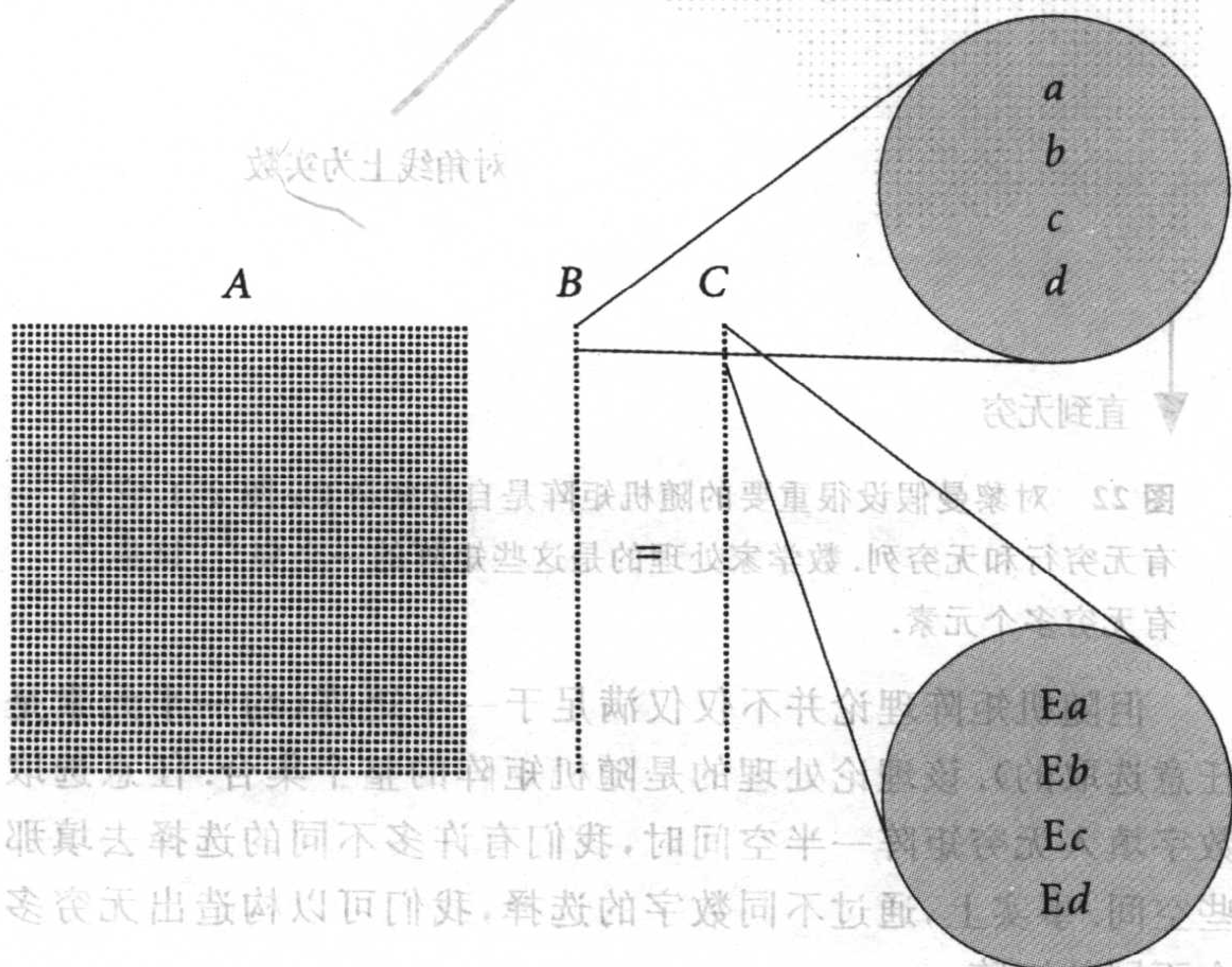


图 23 对于任意 $n\times n$ 矩阵 A,可以找到一个 $n\times 1$ 矩阵 B,使得 A 和 B 相乘所得矩阵 C,是 B 的一个"伸缩"版,即,B 的所有元素都乘以同一个数.具有 B 这种性态的矩阵被称为 A 的特征向量,"伸缩"因子 E 称为 A 的特征值.

假定我们对方阵 A 的特征值感兴趣. 若取另一不同的矩阵 B——它不是方阵,而只由一列构成——将它乘以 A,得另一个只含一列的不同于 B 的矩阵 C. 但也有一些特殊的单列矩阵 B——特殊在与 A 的关系上——与 A 相乘后得到的矩阵 C 恰好与 B 相同,除了被一些数值因素拉长或缩短外. 矩阵中有多少行或列,就有多少个单列矩阵 $B_1,B_2,B_3,B_4\cdots$具有这种特殊性质. 这些矩阵($B_1,B_2,B_3,B_4,\cdots$)被称为矩阵 A 的特征向量,与每一个特征向量相关的数值"伸缩"因子就称为特征值. 【263】

总结一下:一个矩阵——排成行和列的数阵——有一列与它相关的称为特征值的数,n 阶矩阵有 n 个特征值. 如果一个矩阵有无穷多行与无穷多列,那么它就有无限多个特征值. 在随机矩阵的无穷集合中有无穷多个矩阵,相应有无限多个特征值的无穷集合,关键就在这里——对于其中一个无穷矩阵,其特征值的集合可能恰好对应于黎曼 ζ 函数的零点. 【264】【265】

附录:德·布兰奇的证明

德·布兰奇黎曼假设证明的基础,译自2002年5年巴黎庞加莱研究所数论专家讨论会上的报告.

狄利克雷ζ函数的黎曼假设

路易斯·德·布兰奇

狄利克雷ζ函数

$$\zeta(s)=\sum\chi(n)n^{-s}$$

是定义在半平面 $\mathbf{R}\, s>1$ 上的和. n 是正整数,χ 是关于模 ρ 的原始特征,而不是关于模1的主特征. ζ函数在复平面上有一个解析延拓. ζ函数的函数恒等式说,当 ν 等于0或与 χ 具有相同的奇偶性时,整函数

$$\left(\frac{\rho}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)$$

和

$$\left(\frac{\rho}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)\zeta(1-s^{-})^{-}$$

是线性相关的. 整函数

$$E(z)=\left(\frac{\rho}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}iz}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}iz\right)\zeta(1-iz)$$

满足不等式

$$|E(x-\mathrm{i}y)|<|E(x+\mathrm{i}y)|,$$

其中 y 为使整函数相关希尔伯特空间 $H(E)$ 可构造的正数. 在该空间上，最大的损耗变换隐含着 $E(z)$ 零点的简单性，以及它们在线 $\mathrm{i}z^{-}-\mathrm{i}z=-1$ 上的位置. 该空间是从 ν 阶汉克尔(Hankel)变换理论中出现的整函数希尔伯特空间中构造而得.

当 ν 为非负整数时，复平面 ν 阶拉普拉斯变换有定义. 该变换的定义域是复变量 ξ 的函数 $f(\xi)$ 的集合，对于单位圆的每一个元素 ω，$f(\xi)$ 满足恒等式

$$f(\omega\xi)=\omega^{\nu}f(\xi),$$

并且 $f(\xi)$ 关于平面勒贝格测度是平方可积的. 平面上函数 $f(\xi)$ 的 ν 阶拉普拉斯变换上半平面上 z 的解析函数 $g(z)$，它由关于平面勒贝格测度的积分

$$2\pi g(z)=\int(\xi^{\nu})^{-}f(\xi)\exp\left(\frac{\pi\mathrm{i}\xi^{-}z\xi}{\rho}\right)\mathrm{d}\xi$$

来定义. 当 ν 等于 0 时，等式

$$\left(\frac{2\pi}{\rho}\right)\sup\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x+\mathrm{i}y)|^{2}\mathrm{d}x=\int|f(\xi)|^{2}\mathrm{d}\xi$$

对所有正数 y 的最小上界成立. 当 v 大于零时，成立等式

$$\left(\frac{2\pi}{\rho}\right)^{1+\nu}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x+\mathrm{i}y)|^{2}y^{\nu-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\Gamma(\nu)\int|f(\xi)|^{2}\mathrm{d}\xi,$$

积分是关于平面勒贝格测度的.

于是得到上半平面解析函数的希尔伯特空间. 该空间上的元素以收敛积分为特征. 空间上的最大损耗变换定义为将 $f(z)$ 变成 $\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^{\frac{1}{2}}f(z)$，其中 z 的两个函数都属于该空间. 平方根取正的实部.

ν 阶汉克尔变换的定义域即为复平面 ν 阶拉普拉斯变换的定义域. 复平面 ν 阶汉克尔变换是其自身的逆，它满足等式

$$\int|f(\xi)|^{2}\mathrm{d}\xi=\int|g(\xi)|^{2}\mathrm{d}\xi,$$

它将复平面上 ξ 的一个函数 $f(\xi)$ 变成复平面上 ξ 的函数 $g(\xi)$.

等式

$$\int(\xi^{\nu})^{-}\ f(\xi)\exp\left(\frac{\pi i\xi^{-}\ z\xi}{\rho}\right)d\xi =$$

$$\left(\frac{i}{z}\right)^{1+\nu}\int(\xi^{\nu})^{-}\ f(\xi)\exp\left(\frac{-\pi i\xi^{-}\ z^{-1}\xi}{\rho}\right)d\xi$$

定义了复平面 ν 阶汉克尔变换,其中 z 在上半平面.积分是关于平面勒贝格测度的.复平面 ν 阶汉克尔变换的一个基本性质是由尼科莱·索宁(Nikolai Sonine)发现的.若 a 为正数,则存在复平面 ν 阶汉克尔变换的定义域中的复平面上 ξ 的非平凡函数 $f(\xi)$,它在原点的邻域 $|\xi|<a$ 内等于零,它的复平面 ν 阶汉克尔变换在同一个邻域内也等于零.

复平面 ν 阶梅林(Mellin)变换是复平面 ν 阶拉普拉斯变换的一个谱理论.该变换的定义域为复平面 ν 阶拉普拉斯变换的定义域.若上半平面上 z 的函数 $g(z)$ 是该平面上 ξ 的函数 $f(\xi)$ 的复平面 ν 阶拉普拉斯变换,当 $|\xi|<a$ 时等于零,则其复平面 ν 阶梅林变换为上半平面上 z 的解析函数 $F(z)$,$F(z)$ 定义为

$$F(z)=\int_{0}^{\infty}g(it)t^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}iz}dt.$$

复平面 ν 阶梅林变换的主要特征是使用加权哈代空间.

一个解析权函数是上半平面上 z 的函数 $W(z)$,它在该半平面上解析并且不等于零.加权哈代空间 $F(W)$ 是上半平面上 z 的解析函数 $F(z)$,使得对于所有正数 y,可得有限最小上界

$$\sup\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{F(x+iy)}{W(x+iy)}\right|^{2}dx,$$

边界值

$$\frac{F(x)}{W(x)}=\lim\frac{F(x+iy)}{W(x+iy)}$$

关于实轴上勒贝格测度几乎处处存在.最小上界等于关于实轴上勒贝格测度的积分

$$\| F(t) \|^2_{F(W)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{F(t)}{W(t)} \right|^2 \mathrm{d}t.$$

解析权函数

$$W(z) = \left(\frac{\rho}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}z} \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}z \right)$$

应用于复平面 ν 阶梅林变换的特征上. 复平面上 ξ 的函数 $f(\xi)$（当 $|\xi| < a$ 时等于零）的复平面 ν 阶梅林变换是上半平面上 z 的一个解析函数 $F(z)$，使得函数

$$a^{\mathrm{i}z} F(z)$$

属于空间 $F(W)$. 空间 $F(W)$ 上的每一个元素都具有这样的形式. 空间 $F(W)$ 上的一个最大损耗变换定义为将 $F(z)$ 变成 $F(z+\mathrm{i})$，z 的函数 $F(z)$ 和 $F(z+\mathrm{i})$ 都属于空间 $F(W)$. 若 $F(z)$ 和 $F^*(z) = F(z^-)^-$ 都属于空间 $F(W)$，则整函数 $F(z)$ 的集合是一个等距包含于空间 $F(W)$ 的希尔伯特空间. 该空间的元素是复平面 ν 阶汉克尔变换定义域中的复平面 ν 阶梅林变换，它在原点的邻域 $|\xi| < a$ 内等于零，它的复平面 ν 阶汉克尔变换在同一个邻域内也等于零. 复平面 ν 阶索宁空间是具有公理化特征的整函数希尔伯特空间的基本例子.

考虑整函数的具有如下性质的希尔伯特空间 H：

(H1) 当 $F(z)$ 属于该空间，并具有非实的零点 w 时，函数

$$\frac{F(z)(z - w^-)}{z - w}$$

也属于该空间，并与 $F(z)$ 具有同样的范数.

(H2) 对于每一个非实的数 w，该空间上的将 $F(z)$ 变成 $F(w)$ 的线性泛函都是连续的.

(H3) 当 $F(z)$ 属于该空间时，$F^*(z)$ 也属于该空间. 它和 $F(z)$ 总有相同的范数.

当 $F(z)$ 为整函数，且满足不等式

$$|E(x - \mathrm{i}y)| < |E(x + \mathrm{i}y)| \quad (y \text{ 为正数})$$

时，就得到了这种空间的一个例子. 由于 $E(z)$ 在上半平面上没有零点，因此存在加权哈代空间 $F(E)$. 空间 $H(E)$ 是整函数 $F(z)$ 的集合，其中 $F(z)$ 和 $F^*(z)$ 同属于空间 $F(E)$. 空间 $H(E)$ 是等距包含于空间 $F(E)$ 的希尔伯特空间. 该空间满足公理(H1)，(H2)和(H3). 对于每一个复数 w，z 的函数

$$K(w,z)=\frac{E(z)E(w)^{-}-E^{*}(z)E(w^{-})}{2\pi i(w^{-}-z)}$$

都属于该空间. 等式

$$F(w)=\langle F(t),K(w,t)\rangle_{H(E)}$$

对该空间上的每一个元素 $F(z)$ 都成立. 元素为整函数、满足公理(H1)，(H2)和(H3)、且包含非零元素的希尔伯特空间与空间 $H(E)$ 等距离相等.

欧几里得平面 ν 阶索宁空间是整函数的希尔伯特空间，满足公理(H1)，(H2)和(H3). 对于每一个正数 a，参数 a 的空间都包含一个非零元素. 该空间上的最大损耗变换定义为将 $F(z)$ 变成 $F(z+i)$，z 的函数 $F(z)$ 和 $F(z+i)$ 都属于该空间.

与狄利克雷 ζ 函数相关的整函数的希尔伯特空间也是满足公理(H1)，(H2)和(H3)的整函数希尔伯特空间. 该空间为空间 $H(E)$，其元素为

$$E(z)=\left(\frac{\rho}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}iz}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}iz\right)\zeta(1-iz).$$

由 ζ 函数的函数恒等式可以推出整函数 $E(z-i)$ 和 $E^*(z)$ 是线性相关的. 该空间上存在最大损耗变换，因而 $E(z)$ 的零点是简单的且位于线 $iz^{-}-iz=-1$ 上.

从复平面 ν 阶索宁空间构造空间 $H(E)$，可以解释欧拉乘积的收敛性. 空间 $H(E)$ 上的最大损耗变换是从复平面 ν 阶索宁空间上的最大损耗变换中导出来的.

对于所有不能整除 ρ 的素数，ζ 函数的欧拉乘积为

$$\zeta(s)^{-1}=\prod(1-\chi(p)p^{-s}).$$

整函数

$$1-\chi(p)p^{-s}$$

的零点位于它的虚轴上. 函数

$$p^{\frac{1}{2}s}-\chi(p)p^{-\frac{1}{2}s}$$

是零点位于虚轴上的多项式的极限. 复平面上紧致子集上的收敛性是一致的. 半平面 $\mathbf{R}\, s>1$ 上的紧致子集上的欧拉乘积是一致收敛的. 空间 $H(E)$的构造产生于复平面 ν 阶索宁空间. 构造的主要步骤说明如次.

若空间 $H(E_0)$的维数高于 r, $S(z)$是一个 r 次多项式, 其零点与上半平面的距离至少为 1, 则存在空间 $H(E_r)$, 其元素为整函数 $F(z)$, 其中 $S(z)F(z)$属于空间 $H(E_0)$, 乘以 $S(z)$是一个等距变换, 将空间 $H(E_r)$变换成 $H(E_0)$. 若空间 $H(E_0)$上的一个最大损耗变换定义为将 $F(z)$变成 $F(z+\mathrm{i})$, 其中 z 的函数 $F(z)$和 $F(z+\mathrm{i})$都属于该空间, 则空间 $H(E_r)$上的最大损耗变换定义为将 $F(z)$变成 $G(z+\mathrm{i})$, 其中函数 $F(z)$和 $G(z+\mathrm{i})$都是该空间的元素, 使得等式

$$S(z)G(z+\mathrm{i})=H(z+\mathrm{i})$$

对于空间 $H(E_0)$上的元素 $H(z)$成立, $P(z)F(z)$离 $H(z)$最近. 存在整函数 $P(z)$和 $Q(z)$, 使得对于每一个复数 w, z 的函数

$$\frac{Q(z)P(w^-)^- - P(z)Q(w^-)}{\pi(z-w^-)}$$

属于空间 $H(E_r)$, 并且当空间 $H(E_r)$上的变换将 $F(z)$变成 $G(z+\mathrm{i})$时, 等式

$$G(w)=\left\langle F(t), \frac{Q(t)P(w^-)-P(t)Q(w^-)}{\pi(z-w^-)}\right\rangle_{H(E_r)}$$

对于所有的复数 w 都成立.

阅读文献

对于被本书吊起胃口的读者来说，下面的书名更详细地涵盖了纯数学的许多方面.它们都包含有值得非数学家阅读的材料.

Journey Through Genius: *The Great Theorems of Mathematics*, William Dunham, John Wiley and Sons, 1990

Although this book doesn't deal with the Riemann Hypothesis, it gives a very good survey of how mathematicians have set about proving other important theorems.

A Mathematician's Apology, G. H. Hardy, Cambridge University Press, 1967

The gold standard of writing about mathematics for non-mathematicians.

Mathematical Mysteries, Calvin C. Clawson, Plenum Press, New York and London, 1996

This book contains the best detailed explanation of the Riemann Hypothesis for the non-mathematician, as well as providing an excellent account of number theory in general.

The Man Who Knew Infinity, Robert Kanigel, Scribners, New York, 1991 An account of the life and work of Ra-

manujan.

The Development of Mathematics, E. T. Bell, Dover Publications Inc, New York, 1992

Men of Mathematics, E. T. Bell, Simon and Schuster, New York, 1986

These two books are classics in the field. Although the first involves a lot of mathematical material it gives an insight into the philosophical underpinnings of mathematics which can be appreciated by anyone. The second contains fascinating biographies of many major mathematicians.

Littlewood's Miscellany, Edited by Bela Bollobas, Cambridge University Press, 1986

An eccentric and delightful selection of mathematical writings by Jack Littlewood. The introduction by Bollobas, a friend of Littlewood's, is excellent and most of the contents require no mathematical knowledge to enjoy.

Mathematical Expeditions, Reinhard Laubenbacher and David Pengelly, Springer, New York, 1999

An undergraduate text that nevertheless contains many good biographical and historical insights into how mathematicians think and work.

注 释

书中未注明出处的引文均来自作者的采访.

1. Louis de Branges de Bourcia, 'Apology for proof of the Riemann Hypothesis', http://www.math.purdue.edu/~branges/
2. Constance Reid, *Julia, A Life in Mathematics*, Mathematical Association of America, Washington DC, 1996, p. 54
3. Clay Mathematics Institute, 'The Riemann Hypothesis', http://www.claymath.org/prizeproblems/riemann.htm
4. Constance Reid, *Julia, A Life in Mathematics*, Mathematical Association of America, Washington DC, 1996, p. 19
5. Paolo Ribenboim, *The New Book of Prime Number Records*, Springer-Verlag, NewYork, 1996, pp. 159—63
6. G. H. Hardy, 'The Sixth Josiah Willard Gibbs Lecture', read at New York City, 28 December 1928 before a joint session of the American Mathematical Society and the American Association for the Advancement of Science. Reprinted in *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1929, **35**, pp. 778—818
7. Reinhard Laubenbacher and David Pengelley (eds), *Mathematical Explorations: Chronicles by the Explorers*, Spring-

er-Verlag, New York, 1999, p. 187
8. André Weil, *The Apprenticeship of a Mathematician*, translated by Jennifer Gage, Birkhäuser, Basel, 1992, p. 145
9. James Parton, *Sir Isaac Newton*. Quoted in Robert Édouard Moritz (ed.), *Memorabilia Mathematica*, Macmillan, New York, 1914, Quote 1022
10. A. N. Whitehead, *Introduction to Mathematics*, New York, 1911, pp. 59—60. Quoted in Robert Édouard Moritz (ed.), *Memorabilia Mathematica*, Macmillan, New York, 1914, Quote 1218
11. Sir Arthur Eddington, quoted in N. Rose (ed.), *Mathematical Maxims and Minims*, Raleigh, NC, Rome Press, 1988
12. Bertrand Russell, quoted in N. Rose (ed.), *Mathematical Maxims and Minims*, Raleigh, NC, Rome Press, 1988
13. Johann Goethe, quoted in J. R. Newman (ed.) *The World of Mathematics*, Simon & Schuster, New York, 1956, p. 1754
14. Maria Price La Touche, Letter to the *Mathematical Gazette*, 1878, Vol. 12. Quoted in Donald E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 2, Addison-Wesley, Reading, MA, 1997
15. Leonhard Euler, quoted in Howard Eves, *Mathematical Circles*, Prindle, Weber, & Schmidt, Boston, 1969
16. David Brewster, *Letters of Euler*, Vol. 1, New York, 1872, p. 24. Quoted in Robert Édouard Moritz (ed.), *Memorabilia Mathematica*, Macmillan, New York, 1914, Quote 959

17. Leonhard Euler, quoted in G. Simmons, *Calculus Gems*, McGraw-Hill, New York, 1992

18. Ruth McNeill, 'A Reflection on When I Loved Maths and How I Stopped.' *Journal of Mathematical Behavior*, 1988, **7**, 45—50

19. I. M. Gelfand and A. Shen, *Algebra*, Birkhäuser, Boston, 1995

20. Reinhard Laubenbacher and David Pengelly (eds), *Mathematical Expeditions: Chronicles by the Explorers*, Springer-Verlag, New York, 1999, p. 136

21. Robert Musil, *Young Törless*, Secker & Warburg, 1955

22. Marjorie A. Tiefert, The Samuel Coleridge Taylor Archive, maintained by the University of Virginia Library at http://etext.lib.virginia.edu/stc/Coleridge/ascii_files/geometry_poem_letter.html

23. *Ibid.*

24. *Life of Benjamin Robert Haydon, Historical Painter, From His Autobiography and Journals*, 3 vols, edited and compiled by Tom Taylor (London, 1853)

25. *Ibid.*

26. John Keats, *Lamia*, pt. ii, lines 229—37

27. James Boswell, *Life of Johnson*, Harper's Edition, 1871. Quoted in Robert Édouard Moritz (ed.), *Memorabilia Mathematica*, Macmillan, New York, 1914, Quote 981

28. J. S. C. Abbott, *Napoleon Bonaparte*, Vol. 1, New York, 1904, Chap. 10. Quoted in Robert Édouard Moritz (ed.), *Memorabilia Mathematica*, Macmillan, New York, 1914, Quote 1001

29. John Aubrey, 'Thomas Hobbes', in *Aubrey's Brief*

Lives (ed. Oliver Lawson Dick), Oxford University Press, 1960, p. 604

30. E. Lampe, *Die Entwickelung der Mathematik...*, Berlin, 1893, p. 22. Quoted in Robert Édouard Moritz (ed.), *Memorabilia Mathematica*, Macmillan, New York, 1914, Quote 1115
31. Artie Shaw, *The Trouble with Cinderella: An Outline of Identity*, Fithian Press, 1992, p. 273
32. G. H. Hardy, *Ramanujan*, Cambridge University, Press, 1940, p. 5
33. E. T Bell, *The Development of Mathematics*, Dover Publications, New York, 1992, p. 369
34. Constance Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, NewYork, 1996, p. 73
35. David Hilbert, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1902, **8**, 437—45, 478—479. Quoted in Reid, *Ibid.*, p. 75
36. *Ibid.*, p. 83
37. Constance Reid, *Julia: A Life in Mathematics*, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1996, pp. 69—73
38. Bela Bollobas, foreword to *Littlewood's Miscellany*, Cambridge University Press, 1986, p. 16
39. G. H. Hardy, *Ramanujan*, Cambridge University Press, 1940, p. 22
40. C. P. Snow, foreword to G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1967, p. 48
41. Harald Bohr, *Collected Mathematical Works in Three Volumes*, edited by Erling Følner and Børge Jessen, Dansk

Matematisk Forening, Copenhagen, 1953, pp. xxvii-xxviii

42. J. E. Littlewood, *Littlewood's Miscellany*, edited by Bela Bollobas, Cambridge University Press, 1986, p. 76
43. *Ibid.*, p. 87
44. *Ibid.*, p. 85
45. *Ibid.*, p. 88
46. Bela Bollobas, *Ibid.*, foreword, p. 16
47. G. H. Hardy, quoted in Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity*, Scribners, New York, 1991
48. J. E. Littlewood, *Littlewood's Miscellany*, edited by Bela Bollobas, Cambridge University Press, 1986, p. 61
49. G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1967
50. Rae Chorze Fwaz Mystery School, 'Adventures in Self Discovery', http://www.rae-chorze-fwaz.com
51. David Ash, 'Rama, Ramanujan, and 1729', http://www.rae-chorze-fwaz.com/1729.html
52. Charles Simonyi, EDGE 29, 19 November 1997, http://www.edge.org/documents/archive/edge29.html
53. Stanislas Dehaene, EDGE 29, 19 November 1997, http://www.edge.org/documents/archive/edge29.html
54. J. E. Littlewood, *Littlewood's Miscellany*, edited by Bela Bollobas, Cambridge University Press, 1986, pp. 97—9
55. G. H. Hardy, *Mathematical Gazette*, 1910, **9** (5), 333—4
56. Gerald Alexanderson, *The Random Walks of George Pólya*, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2000, p. 72
57. 'Math appreciation', *CCS Notes*, June 1994, pp. 10—11
58. The description of this extraordinary day is taken from Syl-

via Nasar, *A Beautiful Mind*, Faber & Faber, London, 1998, p. 245—6
59. *Ibid.*, p. 246
60. Harold M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications, New York, 2001, p. ix
61. Alan Hodges, *Alan Turing: The Enigma*, Vintage, London, 1992, p. 140
62. *Ibid.*, p. 156
63. Jacques Hadamard, 'Sur la Distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques', *Bulletin de la Société Mathématiques de France*, 1896, **14**, 199—220
64. Joe Shipman, 'De Branges claims to have shown measurable cardinals inconsistent', http://www.math.psu.edu/simpson/fom/postings/9907/msg00024.html (19 July 1999)
65. Rev. J. Spence, *Anecdotes, Observations, and Characters of Books and Men*, London, 1858, p. 132. Quoted in Robert Édouard Moritz (ed.), *Memorabilia Mathematica*, Macmillan, New York, 1914, Quote 1010
66. Paul Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers*, Fourth Estate, London, 1998, pp. 192—3
67. C. J. Keyser, *Lectures on Science, Philosophy, and Art*, New York, 1908, p. 29. Quoted in Robert Édouard Moritz (ed.), *Memorabilia Mathematica*, Macmillan, New York, 1914, Quote 515
68. E. J. Borowski and J. M. Borwein, *Dictionary of Mathematics*, HarperCollins, London, 1989
69. Alfred Adler, 'Reflections: Mathematics and creativity',

New Yorker, 1972, **47** (53), 39—45
70. G. H. Hardy, *Nature*, 1934, **134**, 250
71. Albert Baernstein II *et al.* (eds), The Bieberbach Conjecture (Proceedings of the Symposium on the Occasion of the Proof), American Mathematical Society, Providence, RI, 1986, p. vii
72. *Ibid.*, p. 2
73. Walter Gautschi, in *Ibid.*, p. 205
74. *Ibid.*, p. 209
75. *Ibid.*, p. 213
76. *Ibid.*, p. 210
77. Louis de Branges, in *Ibid.*, p. 201
78. *Ibid.*, p. 201
79. *Ibid.*, p. 201
80. Richard Askey, in *Ibid.*, p. 214—15
81. Wim Klein, quoted in Stanislas Dehaene, EDGE 29, 19 November 1997, http://www.edge.org/documents/archive/edge29.html
82. Neil Sloane and Simon Plouffe, *The Encyclopedia of Integer Sequences*, Academic Press, San Diego, 1995. See also http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html
83. Malcolm Lines, *A Number for Your Thoughts*, Adam Hilger, Bristol, 1986, p. 30
84. G. H. Hardy, *Ramanujan*, Cambridge University Press, 1940, p. 17
85. Paul Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers*, Fourth Estate, London, 1998, pp. 40—41
86. A. M. Odlyzko, 'On the distribution of spacings between zeros of the zeta function', http://www.research.att.

com/~amo/doc/arch/zeta. zero. spacing. pdf

87. Jean-Pierre Changeux and Alain Connes, *Conversations on Mind, Matter, and Mathematics*, edited and translated by M. B. DeBevoise, Princeton University Press, 1995, p. 50
88. A. S. Besicovitch, in J. E. Littlewood, *A Mathematician's Miscellany*, Methuen, London, 1953
89. Henri Poincaré, quoted in Jacques Hadamard, *The Mathematician's Mind*, Princeton University Press, 1996, p. 13
90. Gösta Mittag-Leffler, letter to Georg Cantor, 9 March 1885, quoted in Joseph Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, 1990, p. 138
91. A. M. Legendre, 'Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle', *Mémoires de l'Académie (Royale) des Sciences (de l'Institut de France)*, 2nd series, 1833, **12**, 367—410, plus sheet of figures
92. Reinhard Laubenbacher and David Pengelly (eds), *Mathematical Expeditions: Chronicles by the Explorers*, Springer-Verlag, New York, 1999, p. 26
93. J. E. Littlewood, *Littlewood's Miscellany*, edited by Bela Bollobas, Cambridge University Press, 1986, p. 93
94. Doron Zeilberger, 'Opinion 39: Partial and inconclusive proofs are welcome!' [= Elul 29, 5759], www. math. rutgers. edu/~zeilberg/Opinion39. html (10 September 1999)
95. Yuri Matijasevitch, in Constance Reid, *Julia, A Life in Mathematics*, Mathematical Association of America, Washington DC, 1996, p. 103
96. G. H. Hardy, The Sixth Josiah Willard Gibbs Lecture, read at

New York City, 28 December 1928 before a joint session of the American Mathematical Society and the American Association for the Advancement of Science. Reprinted in *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1929, **35**, 778—818

97. G. H. Hardy, *Ibid.*, pp. 778—9

98. Constance Reid, *Julia, A Life in Mathematics*, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1996, p. 47

99. Charles Swartz, *Infinite Matrices and the Gliding Hump*, World Scientific, Singapore, 1996

100. Plutarch, *Marcellus*, translated by John Dryden (see http://classics.mit.edu/Plutarch/marcellu.html)

101. Bela Bollobas, foreword to J. E. Littlewood, *Littlewood's Miscellany*, Cambridge University Press, 1986, p. 17

102. Bertrand Russell, *The Study of Mathematics: Philosophical Essays*, London, 1910, p. 73. Quoted in Robert Édouard Moritz (ed.), *Memorabilia Mathematica*, Macmillan, New York, 1914, Quote 1104

103. J. J. Sylvester, 'Johns Hopkins Commemoration Day Address', in *Collected Mathematical Papers*, Vol. 3, Cambridge University Press, p. 76. Quoted in Robert Édouard Moritz (ed.), *Memorabilia Mathematica*, Macmillan, New York, 1914, Quote 1032

104. André Weil, *The Apprenticeship of a Mathematician*, translated by Jennifer Gage, Birkhäuser, Basel, p. 91

105. P. Turen, 'The Work of Alfréd Rényi', *Matematikai Lapok*, 1970, 21, 199—210

106. Paul R. Halmos, *I Want to be a Mathematician: An Automathography*, New York, 1985

107. Thomas Jefferson, letter to William Green Munford, 18

June 1799, quoted in J. Robert Oppenheimer, 'The encouragement of science', in I. Gordon and S. Sorkin (eds) *The Armchair Science Reader*, Simon & Schuster, New York, 1959

108. Jean-Pierre Changeux and Alain Connes, *Conversations on Mind, Matter, and Mathematics*, edited and translated by M. B. DeBevoise, Princeton University Press, 1995, pp. 75—6
109. C. C. Moore, 'The work of Alain Connes', *Notices of the American Mathematical Society*, 1982, **29**, 499—501
110. Press Release, Royal Swedish Academy of Sciences, 25 January 2001
111. J. E. Littlewood, *Littlewood's Miscellany*, edited by Bela Bollobas, Cambridge University Press, 1986, p. 59
112. André Weil, *The Apprenticeship of a Mathematician*, translated by Jennifer Gage, Birkhäuser, Basel, p. 182
113. Stephen Leacock, quoted in Howard Eves, *Return to Mathematical Circles*, Prindle, Weber, & Schmidt, Boston, 1988
114. Verena Huber-Dyson, 'On the nature of mathematical concepts: Why and how do mathematicians jump to conclusions?', http://www. edge. org/3rd_culture/huber-dyson/huberdyson_p3. html
115. L. J. Mordell, *Three Lectures on Fermat's Last Theorem*, Chelsea Publishing, New York, 1962
116. Hermann Hankel, *Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten*, Tübingen, 1884, p. 9. Quoted in Robert Édouard Moritz (ed.), *Memorabilia Mathematica*, Macmillan, New York, 1914, Quote 718

117. Stobaeus, (Edition Wachsmuth, 1884), Ecl. I). Quoted in Robert Édouard Moritz (ed.), *Memorabilia Mathematica* Macmillan, New York, 1914, Quote 952
118. Reinhard Laubenbacher and David Pengelly (eds), *Mathematical Expeditions: Chronicles by the Explorers*, Springer-Verlag, New York, 1999, p. 95
119. E. P. Wigner, 'The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences', *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13 February 1960
120. J. E. Littlewood, *Littlewood's Miscellany*, edited by Bela Bollobas, Cambridge University Press, 1986, p. 26

索　引

C

D

E

H

I

S

T

本书简介

1859年,黎曼,一个腼腆的德国数学家,用八页纸回答了长期困扰数学家的一个难题.尽管黎曼不能提供一个证明,但他声称他的解答“很可能”是正确的.

在以后的150年里,世界各国的数学家们孜孜以求,想获得黎曼假设的证明. 他们对此的兴趣是如此之大,以至于在2001年时,一个美国基金会为第一个证明黎曼假设的人设立了一百万美元的奖金.

黎曼假设讲的是素数——一个比1大而不能被1和它本身以外的其他任何整数除尽的整数.此假设试图解释素数在其他数中是如何分布的.数学家们用敬畏的语气谈论这个令人极度兴奋的问题,认为它甚至比费马大定理更难,后者6年前终于为安德鲁·怀尔斯所证明.

萨巴的书匠心独运,它将数学的最高峰展现给普通的读者,并对那些在求解难题的跑道上日夜兼程的数学家作出了生动的描绘.《黎曼博士的零点》对数作了精彩的解释,对我们数系深处的秘密进行了深刻的思考.